أساس
توجيهي

الأساس في الرياضيات

أدبي

الوحدة الثالثة:
تطبيقات التّفاضل

الأستاذ
بلال أبو دريّع

مدارس التربية الريادية
PIONEER EDUCATIONAL SCHOOLS
PES

00962 785 351 625

@بلال أبو دريع

توجيهي

Scanned with CamScanner

تمهيد للدرس الأول

إيجاد ميل منحنى اقتران عند نقطة ما:

تذكر

أن ميل منحنى الاقتران $f(x)$ عند نقطة هو $f'(x)$ عند تلك النقطة.

يعني: ← الميل هو المشتقة →

← ميل الاقتران $f(x)$ عند النقطة (x_1, y_1) هو: $f'(x_1)$

مثال 1

إذا كان الاقتران:

$$f(x) = 6 + x - x^3$$

جد ميل منحنى الاقتران $f(x)$ عند النقطة $(1,6)$

الحل

$$m = f'(1)$$
$$f'(x) = 1 - 3x^2$$
$$f'(1) = 1 - 3 = -2$$

مثال 2

إذا كان الاقتران:

$$f(x) = x^2 + x + 1$$

جد ميل منحنى الاقتران $f(x)$ عند النقطة $(1,3)$

الحل

$$m = f'(1)$$
$$f'(x) = 2x + 1$$
$$f'(1) = 2 + 1 = 3$$

مثال 3

إذا كان $f(x) = 6 + x - x^2$

جد قيمة x التي يكون عندها ميل منحنى الاقتران يساوي صفراً.

الحل

$$m = 0$$
$$f'(x) = 0$$
$$1 - 2x = 0 \rightarrow 1 = 2x$$
$$x = \frac{1}{2}$$

مثال 4

إذا كان $f(x) = 2x^2 - 8x + 1$

جد قيمة x التي يكون عندها ميل منحنى الاقتران يساوي 4.

الحل

$$m = 4$$
$$f'(x) = 4$$
$$f'(x) = 4x - 8 = 4$$
$$4x = 12 \rightarrow x = 3$$

ملاحظة

ميل المستقيم $y = ax + b$ هو $y' = a$

مثال: جد ميل المستقيمات الآتية:

① $y = 2x + 8$

الحل: $y' = 2$

② $y = 6 + 8x$

الحل: $y' = 8$

③ $2y = 4x - 2$

الحل: خلّي y لحالها بعدين اشتق

← أقسم على 2 ← $y = 2x - 1$

$y' = 2$

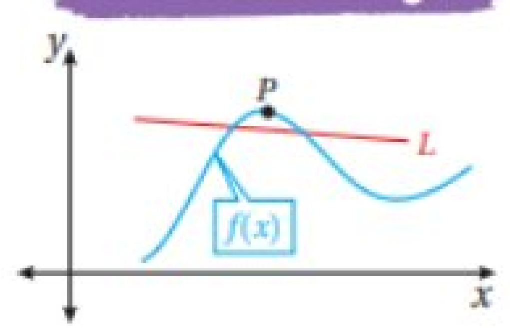
07853351625

Scanned with CamScanner

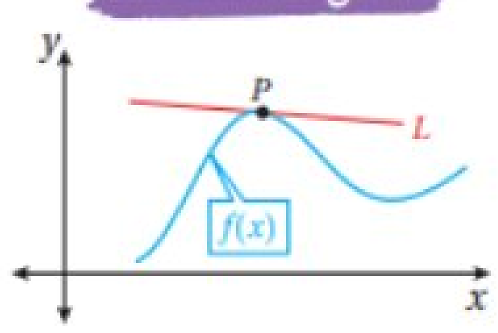
الدرس الأول
المماس والعمودي على المماس

← مماس منحنى اقتران عند نقطة ما: هو مستقيم يمس منحنى الاقتران عند هذه النقطة كما في الشكل الآتي:

ليس مماسًا عند النقطة P:



مماس عند النقطة P:



القانون: إذا كان $f(x)$ قابلاً للاشتقاق عند النقطة (x_1,y_1) فإن مماس منحنى الاقتران $f(x)$ عند نقطة التماس (x_1,y_1) هي:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

من السؤال ثابتة — الميل — $f(x_1)$ — ثابتة

نقطة التماس $f'(x_1)$ — من نقطة التماس

مثال 1

جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران

$$f(x) = x^2 + 3x + 2$$

عند النقطة $(2,12)$

الحل

دائماً لإيجاد معادلة المماس نحتاج ثلاثة أمور رئيسة:

$$\to x_1 = 2$$

$$\to y_1 = 12$$

$$\to m = f'(x_1) = f'(2)$$

نجد $f(x) = 2x + 3$

$$m = f'(2) = 4 + 3 = 7$$

هسه كل اشي جاهز

$\boxed{x_1 = 2}$ $\boxed{y_1 = 12}$ $\boxed{m = 7}$

معادلة المماس:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

نعوّض

$$y - 12 = 7(x - 2)$$

نفكك $y - 12 = 7x - 14$

$$+12 \qquad +12$$

$$y = 7x - 2$$

مثال 2

جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران

$$f(x) = 2x^3 + 6x + 10$$

عند النقطة $(-1,2)$

الحل

نقطة التماس $(-1,2)$

$$x_1 \ y_1$$

$$\to x_1 = -1$$

$$\to y_1 = 2$$

$$\to m = f'(x_1) = f'(-1)$$

$$f'(x) = 6x^2 + 6$$

$$m = f'(-1) = +6 + 6 = 12$$

هسه كل شيء جاهز

$\boxed{x_1 = -1}$ $\boxed{y_1 = 2}$ $\boxed{m = 12}$

عوّض في القانون

معادلة المماس

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 2 = 12(x + 1)$$

$$y - 2 = 12x + 12$$

$$y = 12x + 14$$

مثال 3

جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران

$$f(x) = \frac{e^x}{x + 4}$$

عند النقطة $\left(0, \frac{1}{4}\right)$

الحل

$$\to x_1 = 0$$

$$\to y_1 = \frac{1}{4}$$

$$\to m = f'(x_1) = f'(0)$$

نشتق بقانون القسمة

$$f'(x) = \frac{(x + 4)(e^x) - (e^x)(1)}{(x + 4)^2}$$

$$m = f(0) = \frac{(4)(1) - (1)(1)}{16} = \frac{3}{16}$$

هسه كل شيء جاهز

$\boxed{x_1 = 0}$ $\boxed{y_1 = \frac{1}{4}}$ $\boxed{m = \frac{3}{16}}$

معادلة المماس:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - \frac{1}{4} = \frac{3}{10}(x - 0)$$

$$y - \frac{1}{4} = \frac{3}{16}x$$

$$y = \frac{3}{16}x + \frac{1}{4}$$

مثال 4

جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران

$$f(x) = x^2 - \frac{7}{x^2}$$

النقطة عند $(1, -6)$

الحل

$$\rightarrow x_1 = 1$$
$$\rightarrow y_1 = -6$$
$$\rightarrow m = f'(x_1) = f'(1)$$
$$f'(x) = 2x + \frac{7(2x)}{x^4}$$
$$m = f'(1) = 2 + 14 = 16$$

هسه كل شيء جاهز

$\boxed{x_1 = 1}$ $\boxed{y_1 = -6}$ $\boxed{m = 16}$

نعوّض في القانون:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y + 6 = 16(x - 1)$$
$$y + 6 = 16x - 16$$
$$-6 \qquad -6$$
$$y = 16x - 22$$

تمرين
تحقق من فهمك

1) جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$$

عند النقطة $(3,5)$

← ج: $y - 5 = 11(x - 3)$ ← $y = 11x - 28$

2) جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران

$$f(x) = (x^2 + 1)^2$$

عند النقطة $(1,4)$

← ج: $y - 4 = 8(x - 1)$ ← $y = 8x - 4$

3) جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران

$$f(x) = x^2 - \frac{8}{\sqrt{x}}$$

عند النقطة $(4,12)$

← ج: $y - 12 = \frac{17}{2}(x - 4)$ ← $y = \frac{17}{2}x - 22$

إيجاد معادلة المماس إذا الاحداثي x فقط معلوماً لنقطة التماس.

← نجد y_1 بتعويض x_1 في الاقتران $y_1 = f(x_1)$

مثال 1

جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران:

$$f(x) = 2x^2 + 2$$

عندما $x = -2$

الحل

$$\rightarrow x_1 = -2$$
$$\rightarrow y_1 = f(x_1) = f(-2) = 10$$
$$\rightarrow m = f'(x_1) = f'(-2)$$
$$f'(x) = 4x \rightarrow m = f'(-2) = -8$$

هسه كل شيء جاهز

$\boxed{x_1 = -2}$ $\boxed{y_1 = 10}$ $\boxed{m = -8}$

نعوض في القانون

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 10 = -8(x + 2)$$
$$y - 10 = -8x - 16$$
$$y = -8x - 6$$

Scanned with CamScanner

مثال 2

جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران:

$$f(x) = \frac{8}{x^2+4}$$

عندما $x = -2$

الحل

$$\to x_1 = -2$$
$$\to y_1 = f(x_1) = f(-2) = 1$$
$$\to m = f'(x_1) = f'(-2)$$
$$f'(x) = \frac{-8(2x)}{(x^2+4)^2}$$
$$\to f'(-2) = \frac{-8.(-4)}{64} = \frac{32}{64} = \frac{1}{2}$$

$\boxed{x_1 = -2}$ $\boxed{y_1 = 1}$ $\boxed{m = \frac{1}{2}}$

معادلة المماس:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 1 = \frac{1}{2}(x+2)$$
$$y - 1 = \frac{1}{2}x + 1$$
$$y = \frac{1}{2}x + 2$$

مثال 3

جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران:

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \quad , \quad x = 8$$

الحل

$$\to x_1 = 8$$
$$\to y_1 = f(8) = \sqrt[3]{8} = 2$$
$$\to m = f'(x_1) = f'(8)$$
$$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$
$$f'(x) = \frac{1}{3}\, x^{-\frac{2}{3}}$$
$$f'(8) = \frac{1}{3} . 8^{-\frac{2}{3}}$$
$$m = \frac{1}{3(\sqrt[3]{8})^2} = \frac{1}{12}$$

$x_1 = 8$ $y_1 = 2$ $m = \frac{1}{12}$

معادلة المماس:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

نعوّض $y - 2 = \frac{1}{12}(x - 8)$

$$y - 2 = \frac{1}{12}x - 16$$
$$y = \frac{1}{12}x - 14$$

مثال 4

جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران:

$$f(x) = \frac{8}{\sqrt{x+11}}$$

عند $x = 5$

الحل

$$\to x_1 = 5$$
$$\to y_1 = \frac{8}{\sqrt{16}} = \frac{8}{4} = 2$$
$$\to m = f'(x_1) = f'(5)$$
$$f'(x) = \frac{-8\left(\frac{1}{2\sqrt{x+11}}\right)}{\left(\sqrt{x+11}\right)^2}$$
$$m = f'(5) = -\frac{1}{16}$$

المعادلة $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 2 = -\frac{1}{16}(x-5) \to y - 2 = -\frac{1}{16}x + \frac{5}{16}$$
$$y = -\frac{1}{16}x + \frac{37}{16}$$

0785351625

Scanned with CamScanner

إيجاد نقطة التماس إذا علم ميل المماس

مثال 1

جد احداثيي النقطة الواقعة على منحنى الاقتران $f(x)$

$$f(x)=x^2-4x$$

التي يكون عندها ميل المماس 4

الحل

$$m=4$$

$$f'(x)=4$$

$$2x-4=4\rightarrow 2x=8\rightarrow x=4$$

نعوّض $x=4$ في المعادلة لإيجاد y

$$f(4)=16-16=0$$

إذاً نقطة التماس $(4,0)$

مثال 2

جد إحداثيي النقطة الواقعة على منحنى الاقتران $f(x)=\sqrt{x}$ التي يكون عندها ميل المماس $\frac{1}{2}$

الحل

$$m=\frac{1}{2}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}$ ضرب تبادلي

$2\sqrt{x}=2\rightarrow\sqrt{x}=1$ نربع الطرفين

$$x=1$$

نعوض لإيجاد y $\quad y=f(x)=1$

نقطة التماس $(1,1)$

ملاحظة

مماس أفقي ← الميل = صفر

مماس يوازي محور x ← الميل = صفر

مثال 3

جد احداثيي النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران.

$$f(x)=-x^3+6x^2$$

التي يكون عندها المماس أفقياً

الحل

الميل = صفر

$$f'(x)=0$$

$$-3x^2+12x=0$$

$-3x(x-4)=0$ عامل مشترك

$$-3x=0 \quad or \quad x-4=0$$

$$x=0 \qquad x=4$$

$$f(0)=0 \qquad f(4)=32$$

هناك نقطتي تماس

$$(4,32),(0,0)$$

تمرين

1) جد احداثيي النقط الواقعة على منحنى الاقتران

$$f(x)=1-\sqrt{x}$$

التي يكون عندها ميل المماس $\left(-\frac{1}{4}\right)$

← ج: $(4,-1)$

2) جد احداثيي النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى

$$f(x)=-x^3+3x^2-2$$

التي يكون عندها المماس أفقياً

ج: $(0,-2),(2,2)$

3) جد احداثيي النقطة الواقعة على منحنى الاقتران

$$f(x)=\frac{1}{5}x^5-10x$$

التي يكون عندها ميل المماس 6

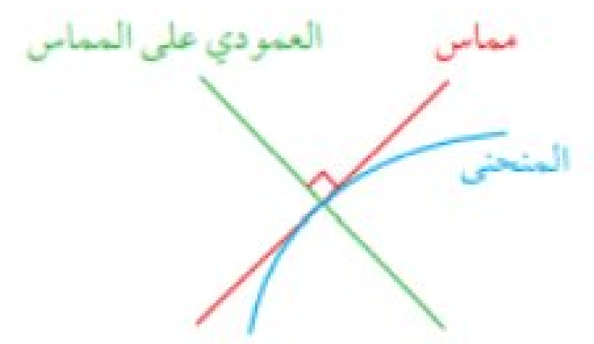
ج: $\left(2,-\frac{68}{5}\right)$

0785351625

Scanned with CamScanner

معادلة العمودي على المماس

العمودي على المماس عند نقطة التماس هو مستقيم يصنع زاوية قائمة مع مماس منحنى الاقتران عند هذه النقطة.



القانون

معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند نقطة التماس (x_1,y_1) هي:

$$y-y_1=m_{\text{العمودي}}(x-x_1)$$

$$m_{\text{العمودي}}=-\frac{1}{m_{\text{المماس}}}=-\frac{1}{f'(x_1)}$$

قبل ما نحل على معادلة العمودي تعال أعلمك كيف أتطلع ميل العمودي.

مثال 1

إذا علمت أن ميل المماس =5 جد ميل العمودي.

الحل

$$m_{\text{العمودي}}=-\frac{1}{m_{\text{المماس}}}=-\frac{1}{5}$$

مثال 2

جد ميل العمودي للاقتران

$f(x)=x^2+1$ عند $(3,10)$

الحل

$$m_{\text{العمودي}}=f'(3)=6$$

$$m_{\text{العمودي}}=-\frac{1}{\text{ميل المماس}}=-\frac{1}{6}$$

هسه انت جاهز عشان أتطلع معادلته العمودي على المماس.

مثال 1

جد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران:

$$f(x)=e^{3x}$$

عند النقطة $(0,1)$

الحل

$$\to x_1=0$$
$$\to y_1=1$$
$$\to m_{\text{المماس}}=f'(x_1)=f'(0)$$
$$f'(x)=3e^{3x}$$
$$m_{\text{المماس}}=f'(0)=3$$
$$m_{\text{العمودي}}=-\frac{1}{3}$$

هسه كل شيء معنا

$$x_1=0\,,\quad y_1=1,\quad m_{\text{العمودي}}=-\frac{1}{3}$$

معادلة العمودي:

$$y-y1=m_{\text{العمودي}}(x-x1)$$
$$y-1=-\frac{1}{3}(x-0)$$
$$y=-\frac{1}{3}x+1$$

مثال 2

جد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران:

$$f(x)=5x^3+x^2-2$$

عند النقطة $(-1,-6)$

الحل

$$\to x_1=-1$$
$$\to y_1=-6$$
$$\to m_{\text{المماس}}=f'(x_1)=f'(-1)$$
$$f'(x)=15x^2+2x$$
$$m_{\text{المماس}}=f'(-1)=15-2=13$$
$$\longrightarrow m_{\text{العمودي}}=-\frac{1}{13}$$

معادلة العمودي:

$$y-y_1=m_{\text{العمودي}}(x-x_1)$$
$$y+6=13(x+1)$$
$$y+6=13x+13$$
$$y=13x+7$$

0785351625

Scanned with CamScanner

مثال 3

جد معادلة العمودي على المماس للاقتران

$f(x) = 2x^2(6 - x)$

عند النقطة $x = 5$

الحل

$f(x) = 12x^2 - 2x^3$

$x_1 = 5$

$y_1 = f(x_1) = f(5) = 50$

$m_{\text{المماس}} = f'(x_1) = f'(5)$

$f'(x) = 24x - 6x^2$

$m_{\text{المماس}} = f'(x) = -30$

$m_{\text{العمودي}} = \frac{1}{30}$

معادلة العمودي:

$y - y_1 = m_{\text{العمودي}}\,(x - x_1)$

$y - 50 = \frac{1}{30}(x - 5)$

تمرين

جد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران $f(x) = \ln x^3$

عند النقطة $(1,0)$

ج: $y - 1 = -\frac{1}{3}(x)$

$y = -\frac{1}{3}x + 1$

أفكار خارقة

ملاحظات هامة:

لإيجاد قيمة x_1، إذا كانت مش معطاة في السؤال.

1) عند نقطة تقاطع الاقتران مع المحور y

$\Leftarrow x = 0$

2) عند نقطة تقاطع الاقتران مع المحور x

$\Leftarrow y = 0$

3) عند النقطة التي يكون عندها المماس موازياً لمستقيم ما.

فإن ⇐ ميل المماس=ميل المستقيم

المشتقة= المشتقة

4) عند النقطة التي يكون عندها المماس عمودي على مستقيم ما.

فإن ⇐ م المماس × م المستقيم $= -1$

المشتقة × المشتقة $= -1$

5) لإيجاد نقاط تقاطع اقترانين بنساويهم ببعض

⇐ الصورة = الصورة

6) المستقيم مماس لمنحنى الاقتران عند النقطة $(x1, y1)$

فإن المشتقة = المشتقة

الصورة = الصورة

0785351625

Scanned with CamScanner

مثال1

جد معادلة العمودي لمنحنى الاقتران

$f(x) = 4 - 4x^3$

عند نقطة تقاطعه مع المحور x

الحل

تقاطعه مع المحور x ⇐ معناها $y = 0$

لا تنس $y = f(x)$

$$f(x) = 4 - 4x^3$$

$$0 = 4 - 4x^3 \rightarrow \frac{4}{4} = \frac{4}{4}x^3$$

$$x^3 = 1^1 \rightarrow x = 1$$

الآن طلعنا قيمة $x_1 = 1$

بنحل عادي

$$\rightarrow x_1 = 1$$

$$\rightarrow y_1 = f(x_1) = f(1) = 0$$

$$\rightarrow m_{\text{مماس}} = f'(x_1) = f'(1)$$

$$f'(x) = -12x^2$$

$$m_{\text{مماس}} = f'(1) = -12$$

$$m_{\text{العمودي}} = \frac{1}{12}$$

معادلة العمودي:

$$y - y_1 = m_{\text{العمودي}}(x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{1}{12}(x - 1)$$

$$y = \frac{1}{12}x - \frac{1}{12}$$

مثال2

جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران:

$f(x) = x^2 - 4x - 4$

عند نقطة تقاطعه مع المحور y

الحل

تقاطعه مع المحور y ⇐ $x = 0$

$$\rightarrow y_1 = f(x_1) = f(0) = -4$$

$$\rightarrow m_{\text{المماس}} = f'(x_1) = f'(0)$$

$$f'(x) = 2x - 4$$

$$m = f(0) = -4$$

معادلة المماس:

$$y - y_1 = m_{\text{المماس}}(x - x_1)$$

$$y + 4 = -4(x - 0)$$

$$y + 4 = -4x$$

$$y = -4x - 4$$

مثال3

جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران

$f(x) = x^2 - 4x - 4$

عند النقطة التي يكون عندها المماس موازياً للمستقيم $y = 2x - 1$

الحل

المماس يوازي مستقيم

ميل المماس = ميل المستقيم

المشتقة = المشتقة

$$2x - 4 = 2$$

$$+4 \quad +4$$

$$\frac{2}{2}x = \frac{6}{2} \rightarrow x = 3$$

$$\rightarrow x_1 = 3$$

$$\rightarrow y_1 = f(3) = 9 - 12 - 4 = -7$$

$$\rightarrow m_{\text{مماس}} = f'(x_1) = f'(3)$$

$$f'(x) = 2x - 4$$

$$f'(3) = 2$$

$x_1 = 3$ $\qquad$ $y_1 = -7$ $\qquad$ $m = 2$

معادلة المماس:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y + 7 = 2(x - 3)$$

$$y + 7 = 2x - 6$$

$$y = 2x - 13$$

مثال4

جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران:

$f(x) = x^2 - 3x - 4$

عند النقطة التي يكون عندها المماس عمودياً على المستقيم

$y = x + 4$

الحل

المماس عمودي مستقيم

⇐ م المماس × م المستقيم = 1-

المشتقة × المشتقة = 1-

$$\rightarrow (2x - 3) \times (1) = -1$$

$$2x - 3 = -1$$

$$+3 \quad +3$$

$$2x = 2 \rightarrow x = 1$$

$$\rightarrow x_1 = 1$$

$$\rightarrow y_1 = f(x_1) = f(1) = -6$$

$$\rightarrow \text{المماس} = f'(x_1) = f'(1)$$

$$f'(x) = 2x - 3$$

$$m = f'(1) = 2 - 3 = -1$$

معادلة المماس:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y + 6 = -1(x - 1)$$

$$y + 6 = -x + 1$$

$$y = -x - 5$$

07853351625

Scanned with CamScanner

مثال5

يبين الشكل المجاور منحنى الاقتران :

$$f(x) = x^2 - 4x + 7$$

والمستقيم :

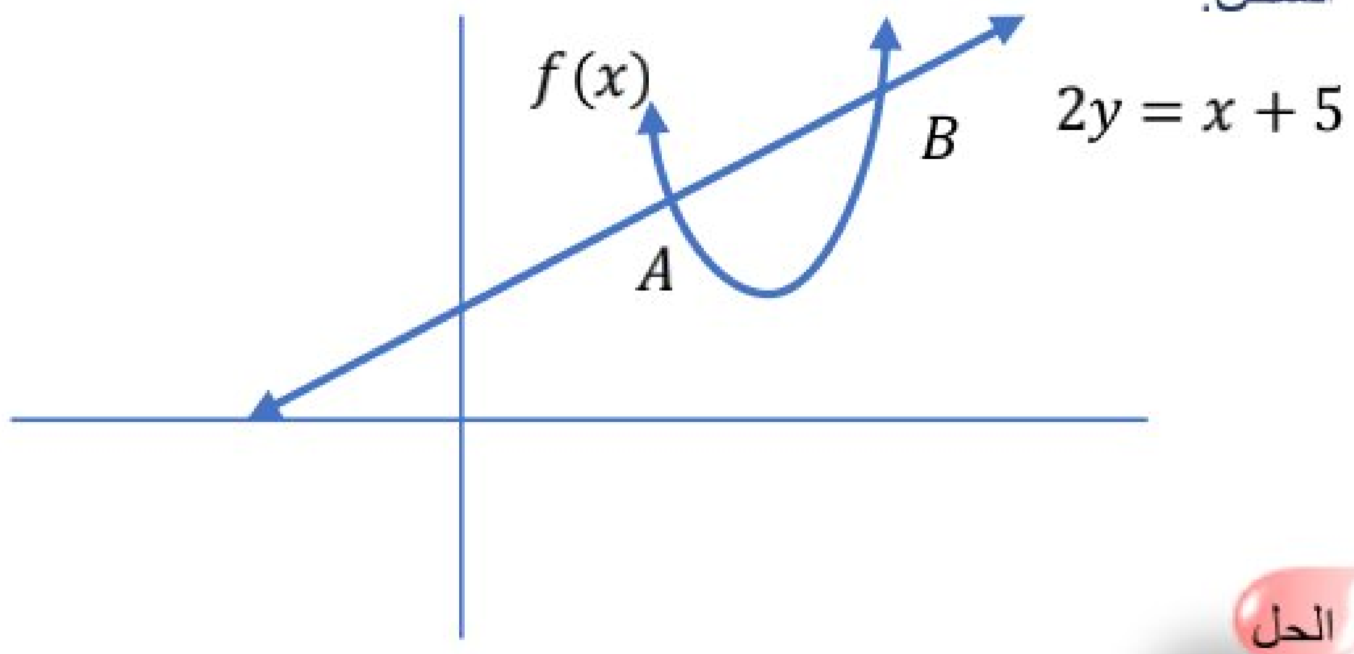
$$2y = x + 5$$

جد :

a) إحداثيي كل من النقطة a والنقطة b

b) جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة a والنقطة b

الشكل:



الحل

نجد تقاطع المنحنى والمستقيم نجهز قاعدة المستقيم

$$2y = x + 5 \to y = \frac{x+5}{2}$$

$$\to f(x) = x^2 - 4x + 7$$

لإيجاد نقاط التقاطع نساويهم ببعض :

$$y = f(x)$$

$$\frac{x+5}{2} = \frac{x^2 - 4x + 7}{1}$$

$$x + 5 = 2x^2 - 8x + 14$$

$$2x^2 - 9x + 9 = 0$$

نحلل بطريقة المقص :

$$2x^2 - 9x + 9 = 0$$

$$(2x - 3)(x - 3) = 0$$

$$2x - 3 = 0 \to x = \frac{3}{2}$$

أو $x - 3 = 0 \to x = 3$

هناك معادلتي مماس:

1 عند $x_1 = \frac{3}{2}, y_1 = f\left(\frac{3}{2}\right)$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - 4\left(\frac{3}{2}\right) + 7$$

$$y_1 = \frac{9}{4} - 6 + 7 = \frac{9}{4} + 1 = \frac{13}{4}$$

$$\mathrm{m} = f'(x_1) = f(\frac{3}{2})$$

$$f'(x) = 2x - 4$$

$$f'\left(\frac{3}{2}\right) = -1 \to$$

معادلة المماس الأولى :

$$y - \frac{13}{4} = -1\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

2) عند $x = 3$ $x_1 = 3$

$$y_1 = f(3) = 9 - 12 + 7 = 4$$

$$\mathrm{m} = f'(x_1) = f'(3)$$

$$f'(x) = 2x - 4$$

$$\mathrm{m} = f'(3) = 2$$

معادلة المماس الثانية :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 4 = 2(x - 3)$$

$$y - 4 = 2x - 6$$

$$y = 2x - 2$$

مثال

إذا كان

$$f(x) = kx^3 + h$$

حيث k, h ثابتان جد قيمة k, h التي تجعل المستقيم $y = x + 1$ مماسا للاقتران $f(x)$ عند $x = 1$

الحل

المستقيم مماس للاقتران

← ميل المستقيم =ميل الاقتران

← المشتقة =المشتقة

← الصورة = الصورة

عندما $\mathrm{x} = 1$

$$3kx^2 = 1, x = 1$$

$$\frac{kx^2}{3} = \frac{1}{3}, x = \frac{1}{3}$$

← الصورة = الصورة

$$f(x) = y$$

$$kx^3 + h = x + 1$$

نعوض: $x = 1, k = \frac{1}{3}$

$$\frac{1}{3} + h = 2$$

$$h = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

0785351625

تمرين

1)جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران :

$$f(x) = 2e^{2x}$$

عند نقطة تقاطعه مع المحور y

2) جد معادلة العمودي على المماس للاقتران

$$f(x) = \ln(x+2)$$

عند تقاطعه مع المحور x

3) جد إحداثيي النقطة الواقعة على منحنى الاقتران :

$$f(x) = \sqrt{x} - 1$$

التي يكون عندها مماس منحنى الاقتران موازيا للمستقيم

$$y = 2x - 1$$

4) إذا كان الاقتران

$$f(x) = ax^2 + 2x + b$$

جد قيمة الثابت a,b التي تجعل المستقيم

$$y = 12x - 1$$

مماساً لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند $x = 1$

أتدرب وأحل مسائل

أجد معادلة المماس لمنحني كل اقتران ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

1) $f(x) = x^3 - 6x + 3 , (2,-1)$

2) $f(x) = \dfrac{x^4 - 3x^3}{x} , (1,-2)$

3) $f(x) = \sqrt{x}(x^2 - 1), (1,0)$

4) $f(x) = x + \dfrac{4}{x} , (-4,-5)$

5) $f(x) = x + e^x , (0,1)$

6) $f(x) = \ln(x+e) , (0,1)$

أجد معادلة المماس لمنحني كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة النقطة المعطاة:

7) $f(x) = \sqrt{x-7} , x = 16$

8) $f(x) = (x-1)e^x , x = 1$

9) $f(x) = \dfrac{x+3}{x-3} , x = 4$

10) $f(x) = (\ln x)^2 , x = e$

أجد معادلة العمودي على المماس لمنحني كل اقتران ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

11) $f(x) = (3x+10)^2 , (-3,1)$

12) $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{2x+1}} , (4,1)$

0785351625

Scanned with CamScanner

يبين الشكل المجاور منحني الاقتران:

$f(x) = \ln(x+5)$

13) أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند نقطة تقاطعه مع المحور x.

14) أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند نقطة تقاطعه مع المحور y.

إذا كان : $f(x) = 4e^{2x+1}$ فأجد كلا مما يأتي:

15) معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند نقطة تقاطعه مع المستقيم $x = -1$.

16) معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند نقطة تقاطعه مع المحور y.

17) اجد احداثيي النقطة الواقعة على منحنى الاقتران:

$f(x) = x^2 - x - 12$

التي يكون عندها ميل المماس 3، ثم أكتب معادلة هذا المماس.

18) أجد احداثيي النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران : $f(x) = x^3 - 4x^2 - 4$

التي يكون عندها المماس أفقياً.

19) أجد احداثيي النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{2x-1}}$

التي يكون عندها المماس أفقياً.

20) أجد احداثيي النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران : $f(x) = 5x^2 - 49 + 12$

التي يكون عندها المماس 1.

يبين الشكل المجاور منحني الاقتران: $y = 6x - x^2$:

21) أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة p.

22) أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة p.

0785351625

Scanned with CamScanner

مهارات التفكير العليا

تبرير: إذا كان $f(x) = 6 - x^2$ ، فأجد كلاً ممّا يأتي:

23) معادلة المماس لمنحني الاقتران $f(x)$ عند كل من النقطة $(-1, 5)$ والنقطة $(1,5)$ ، مبرراً إجابتي.

24) نقطة تقاطع المماسين من الفرع السابق، مبرراً إجابتي.

تحد: إذا كان $f(x) = \sqrt{x}$ فأجل عن السؤالين اللآتيين تباعاً:

25) أجد معادلة المماس لمنحني الاقتران عند النقطة $(1,1)$.

26) أجد معادلة العمودي على المماس لمنحني الاقتران عند النقطة $(1,1)$.

27) تبرير: أجد احداثيي النقطة الواقعة على منحني الاقتران $f(x) = \sqrt{x} - 1$، التي يكون عندها منحني الاقتران موازياً للمستقيم: $y = 2x - 1$.

0785351625

Scanned with CamScanner

الدرس الثاني
المشتقة الثانية والسرعة المتجهة والتسارع

يطلق على الاقتران الناتج منه اشتقاق الاقتران مرتين اسم المشتقة الثانية ويرمز له بالرمز $f''(x)$
ويمكن التعبير عنه أيضاً بالرموز التالية :

$$\frac{d^2y}{dx^2},\ y'',\ \frac{d^2}{dx^2}(f(x))$$

مثال1

جد المشتقة الثانية لكل اقتران مما يلي:

(1

$$f(x) = x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \sin x$$

الحل

$$f'(x) = 5x^4 - 2x^3 + \cos x$$
$$f''(x) = 20x^3 - 6x^2 - \sin x$$

(2

$$f(x) = \ln x + e^x$$

الحل

$$f'(x) = \frac{1}{x} + e^x$$

$$f''(x) = \frac{-1}{x^2} + e^x$$

(3

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

الحل

نجهز $f(x)$

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$$
$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}$$
$$f''(x) = \frac{-2}{9}x^{\frac{-5}{3}}$$

(4

$$f(x) = e^x \sin x$$

الحل

نشتق بقانون الضرب :

$$f'(x) = e^x(\cos x) + e^x \sin x$$

قانون الضرب مرتين :

$$f''(x) = e^x(-\sin x) + \cos x\, e^x + \sin x\, e^x + e^x(\cos x)$$

بالاختصار:

$$f''(x) = 2e^x(\cos x)$$

مثال2

جد المشتقة الثانية لكل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة :

(1

$$f(x) = x^3 + 7x^2, x = -3$$

الحل

$$f'(x) = 3x^2 + 14x$$
$$f''(x) = 6x + 14$$
$$f''(-3) = -18 + 14 = -4$$

(2

$$f(x) = 2 - 4x^2, x = 2$$

الحل

$$f'(x) = -8x$$
$$f''(x) = -8$$
$$f''(2) = -8$$

0785351625

Scanned with CamScanner

(3

$$f(x)=\frac{4}{\sqrt{3x-2}},x=2$$

الحل

الطريقة الأولى :

$$f'(x)=\frac{-4(\frac{3}{2\sqrt{3x-2}})}{(\sqrt{3x-2})^2}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{-6}{\sqrt{3x-2}}}{(\sqrt{3x-2})^2}$$

بسط ال $f'(x)$:

$$f'^{(x)}=\frac{-6}{(\sqrt{3x-2})^3}$$

$$f''(x)=\frac{6(3\left(\sqrt{3x-2})^2.\left(\frac{3}{2(\sqrt{3x-2})}\right)\right)}{(\sqrt{3x-2})^6}$$

$$f''^{(2)}=\frac{6\left(3.4.\left(\frac{3}{4}\right)\right)}{(2)^6}=\frac{54}{64}=\frac{27}{32}$$

يمكن حل السؤال بطريقة التجهيز :

الطريقة الثانية:

$$f(x)=4(3x-2)^{\frac{-1}{2}}$$

$$f'^{(x)}=-2(3x-2)^{\frac{-3}{2}}\ .3$$

نبسط:

$$f'^{(x)}=-6(3x-2)^{\frac{-3}{2}}$$

$$f''^{(x)}=9(3x-2)^{\frac{-5}{2}}\ .3$$

نعوض: $x=2$

$$f''^{(x)}=9(4)^{\frac{-5}{2}}\ .3=\frac{27}{\sqrt{4^5}}=\frac{27}{2^5}=\frac{27}{32}$$

مجاهيل المشتقة الثانية

مثال1

اذا كانت :

$$f(x)=ax^4+3x^2$$

وكانت $f''^{(2)}=42$ جد قيمة a

الحل

$$f'(x)=4ax^3-6x$$

$$f''(x)=12ax^2-6$$

$$f''^{(2)}=48a-6=42\rightarrow a=1$$

مثال2

إذا كان :

$$f(x)=2x^3-6x^2$$

جد قيمة x التي تجعل $f''(x)=0$

الحل

$$f'^{(x)}=6x^2-12x$$

$$f''^{(x)}=12x-12=0\rightarrow x=1$$

تمرين

تحقق من فهمك

1)أجد المشتقة الثانية لكل اقتران مما يلي :

$f(x)=x^4-3x^2$(a

$f(x)=\frac{2}{x^3}$(b

2) جد المشتقة الثانية عند قيمة X المعطاة :

$f(x)=2x^2-x^3+4,x=2$ (a

ج: -8

$f(x)=\frac{2}{x^2+1}$(b

ج: 4

3) إذا كان $f(x)=cx^3-3cx^2+x$ وكان $f''(2)=-2$

جد قيمة الثابت c

0785351625

Scanned with CamScanner

إثبات

إذا كان $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{(5-3x^2)^6}$

فأثبت أن :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{5+33x^2}{(5-3x^2)^7}$$

الحل

نشتق مرة واحدة لإيجاد $\frac{d^2y}{dx^2}$:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(5-3x^2)^6(1) - (x)(6(5-3x^2)^5)(-6x)}{(5-3x^2)^{12}}$$

$$= \frac{(5-3x^2)^6 + 36x^2(5-3x^2)^5}{(5-3x^2)^{12}}$$

$$= \frac{(5-3x^2)^5\left((5-3x^2)+36x^2\right)}{(5-3x^2)^{12}}$$

$$= \frac{5+33x^2}{(5-3x^2)^7}$$

السرعة والتسارع

الحركة على خط مستقيم

لدراسة جسم يتحرك بخط مستقيم سنفرض أن الجسم يتحرك على خط الحداد من موقع ابتدائي وأن اتجاه حركته يكون موجباً أو سالباً وعليه فإن :

موقع الجسم بالنسبة لنقطة الأصل يمثل اقتراناً بالنسبة للزمن t

موقع الجسم $s(t) = (position)$

السرعة المتجهة $v(t) = (velocity)$

وتمثل معدل تغير الموقع $s(t)$ بالنسبة للزمن

التسارع $a(t) = (accelaration)$

وتمثل معدل تغير السرعة المتجهة بالنسبة للزمن

القوانين

$$\underset{\text{الموقع}}{S'} \rightarrow \underset{\text{السرعة}}{V'} \rightarrow \underset{\text{التسارع}}{a}$$

1) $v(b) = s'(t)$

2) $a(t) = v'(t)$

ملاحظات

1 -إذا كانت السرعة موجبة $v(t) < 0$ فإن الجسم يتحرك في الاتجاه الموجب لليمين

2- إذا كانت السرعة سالبة $0>v(t)$ فإن الجسم يتحرك في الاتجاه السالب لليسار

3 عندما يكون الجسم في حالة سكون لحظي $v(t) = 0$

0785351625

Scanned with CamScanner

مثال1

يمثل الاقتران :

$$s(t) = t^3 - 4t^2 + 5t\ , t \geq 0$$

موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم حيث s الموقع بالأمتار و t الزمن بالثواني :

1) ما سرعة الجسم المتجهة t=2

2) في اتجاه يتحرك الجسم عندما t=2

3) ما تسارع الجسم عندما t=2

4) جد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي

الحل

(1

$$S \to V \to a$$

$$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 8t + 5$$

$$v(2) = 3(2)^2 - 8(2) + 5 = 12 - 16 + 5 = 1$$

سرعة الجسم المتجهة عندما *t=2* هي $1 m/s$

2) اتجاه الجسم عندما *t=2* بما أن السرعة المتجهة موجبة عندما *t=2* فإن الجسم يتحرك بالاتجاه الموجب إلى اليمين

(3

$$a(t) = v'(t) = 6t - 8$$

$$a(t) = 6(2) - 8 = 12 - 8 = 4$$

(4

يكون الجسم في حالة سكون لحظي $v(t) = 0$

$$3t^2 - 8t + 5 = 0$$

$$(3t - 5)(t - 1) = 0$$

$$(t - 1) = 0 \to t = 1$$

$$(3t - 5) = 0 \to t = \frac{5}{3}$$

التحليل

$$-\frac{3}{3} \qquad -\frac{5}{3}$$

$$-\frac{1}{t} \qquad -\frac{5}{3t}$$

مثال2

يمثل الاقتران :

$$s(t) = t^3 - 5t^2 + 3t - 7, t \geq 0$$

موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم حيث s الموقع بالأمتار وt الزمن بالثواني

1) ما سرعة الجسم المتجهة عندما *t=1*

2) في أي اتجاه يتحرك الجسم عندما *t=1*

3) ما تسارع الجسم عندما *t=1*

4) جد قيم t عندما يكون الجسم في حالة سكون لحظي

الحل

(1

$$s(t) = t^3 - 5t^2 + 3t - 7$$

$$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 10t + 3$$

$$v(1) = 3 - 10 + 3 = -4\ m/s$$

2) بما أن $v(1) = -4\ m/s$ السرعة سالبة فإن الجسم يتحرك بالاتجاه السالب (لليسار)

(3

$$a(t) = v'(t) = 6t - 10$$

$$a(1) = 6 - 10 = -4\ m/s^2$$

(4

$$v(t) = 0$$

$$3t^2 - 10t + 3 = 0$$

$$(3t - 1)(t - 3) = 0$$

$$(3t - 1) = 0 \to t = \frac{1}{3}$$

$$(t - 3) = 0 \to t = 3$$

$$a$$

$$-\frac{a}{3} \qquad -\frac{1}{3}$$

$$-\frac{3}{t} \qquad -\frac{1}{3t}$$

0785351625

Scanned with CamScanner

مثال3

يمثل الاقتران
$$s(t) = (t-3)^3 \quad ,t \geq 0$$
موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم حيث s الموقع بالأمتار وt الزمن بالثواني

1) ما سرعة الجسم المتجهة عندما $t=5$
2) في أي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t=5$
3) ما تسارع الجسم عندما $t=5$
4) جد قيم t عندما يكون الجسم في حالة سكون لحظي

الحل

(1
$$v(t) = s'(t) = 3(t-3)^2$$
$$v(t) = 3(5-3)^2 = 12\ m/s$$
(2 يتحرك الجسم في الاتجاه الموجب أي اليمين

(3
$$a(t) = v'(t) = 6(t-3)$$
$$a(5) = 6(5-3) = 12\ m/s$$
(4 $v(t) = 0$
$$3(t-3)^2 = 0$$
$$(t-3)^2 = 0$$
نأخذ جذر الطرفين:
$$(t-3) = 0 \rightarrow t = 3$$

تمرين
تحقق من فهمك

يمثل الاقتران :
$$s(t) = 3t^2 - t^3 \ ,t \geq 0$$
موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم حيث s الموقع بالأمتار وt الزمن بالثواني

1) ما سرعة الجسم المتجهة عندما $t=3$
2) في أي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t=3$
3) ما تسارع الجسم عندما $t=3$
4) جد قيم t عندما يكون الجسم في حالة سكون لحظي

جواب:

$-9\ m/s$(1   2) لليسار

$-12\ m/s$ (3 $t = 0,2$ (4

أفكار خفيفة لطيفة

عندما يكون التسارع صفر (ينعدم التسارع)
$$a(t) = 0$$
عندما تكون السرعة صفر (تنعدم السرعة)
$$v(t) = 0$$

مثال1

إذا مثل الاقتران
$$s(t) = t^3 - 12t - 9 \ ,t \geq 0$$
موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم حيث s الموقع بالأمتار وt الزمن بالثواني جد سرعة الجسم عندما يكون تسارعه صفراً

المطلوب السرعة عندما $a = 0$

الحل
$$a(t) = 0$$
$$s(t) = t^3 - 12t - 9$$
$$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 12$$
$$a(t) = v'(t) = 6t$$
$$6t = 0 \rightarrow t = 0$$
الآن نعوّض في $v(t)$
$$v(0) = 3(0) - 12 = -12\ m/s$$
الآن نعوض في a :
$$a(2) = 12(2) = 24\ \ m/s^2$$

تمرين

إذا مثل الاقتران :
$$s(t) = t^3 - 9t^2 + 2 \ ,t \geq 0$$
موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم حيث s الموقع بالأمتار وt الزمن بالثواني جد سرعة الجسم عندما يكون تسارعه صفراً

ج: $-27 m/s^2$

0785351625

Scanned with CamScanner

مثال3

إذا مثل الاقتران :

$$s(t) = t^3 - 2t + 4 \ \ , t \geq 0$$

موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم حيث s الموقع بالأمتار و t الزمن بالثواني جد سرعة الجسم عندما يكون تسارعه $12\ m/s^2$

الحل

$$s(t) = t^3 - 2t + 4$$

$$v(t) = 3t^2 - 2$$

$$a(t) = 6t$$

المطلوب v عندما $a=12$

$$\rightarrow 6t = 12 \rightarrow t = 2$$

نعوض $t = 2$ في $v(t)$:

$$v(2) = 3(2)^2 - 2 = 10\ m/s$$

مثال4

تحدي: إذا مثل الاقتران

$$s(t) = 3t^2 - t^3$$

موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم حيث s الموقع بالأمتار و t الزمن بالثواني جد اتجاه حركة الجسم عندما يكون تسارعه صفراً

الحل

$$s(t) = 3t^2 - t^3$$

$$v(t) = 6t - 3t^2$$

$$a(t) = 6 - 6t$$

$$\rightarrow a(t) = 0$$

$$\rightarrow 6 - 6t = 0 \rightarrow t = 1$$

نجد $v(1)$

$$v(1) = 6 - 3 = 3$$

بما أن السرعة موجبة إذا الجسم يتحرك في الاتجاه الموجب باتجاه اليمين

مثال4

إذا علمت أن

$$s(t) = 2at^2 + 4t$$

جد قيمة الثابت a التي تجعل سرعة الجسم المتجهة بعد 4 ثواني من الحركة تساوي $12\ m/s$

الحل

$$v(4) = 12$$

$$v(t) = 4at + 4$$

$$v(4) = 8a + 4 = 12 \rightarrow a = 1$$

0785351625

Scanned with CamScanner

أتدرب وأحل مسائل

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 5x$

2) $f(x) = 2e^x + x^2$

3) $f(x) = 2\cos x - x^3$

4) $f(x) = 4\ln x - 3x^3$

5) $f(x) = x^3(x+6)^2$

6) $f(x) = x^7 \ln x$

7) $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$

8) $f(x) = \sin x^2$

9) $f(x) = 2x^{-3}$

10) $f(x) = x^3 - \dfrac{5}{x}$

11) $f(x) = \sqrt{x}$

12) $f(x) = 2 - 4x + x^2 - x^3$

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة.

13) $f(x) = 8x^3 - 3x + \dfrac{4}{x}, x = -2$

14) $f(x) = \dfrac{1}{2x-4}, x = 3$

15) إذا كان: $f(x) = px^3 - 3px^2 + x - 4$

وكانت: $f''(2) = -1$ ، فأجد قيمة الثابت p.

يمثل الاقتران: $s(t) = t^5 - 20t^2 , t \ge 0$

موقع جسم يتحرك على خط مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار ، و t الزمن بالثواني.

16) ماسرعة الجسم المتجهة عندما $t = 3$؟

17) في أي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t = 3$؟

18) ماتسارع الجسم عندما $t = 3$؟

19) أجد قيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

يمثل الاقتران: $s(t) = \frac{3t}{1+t} , t \ge 0$ موقع جسم يتحرك على خط مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار ، و t الزمن بالثواني.

20) ما سرعة الجسم المتجهة عندما $t = 4$؟

21) في أي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t = 4$؟

22) ماتسارع الجسم عندما $t = 4$؟

لوح تزلج: يتحرك رامي في مسار مستقيم على لوح تزلج، بحيث يمكن نمذجة موقعه باستعمال الاقتران:

$$s(t) = t^2 - 8t = 12$$

حيث s الموقع بالأمتار ، و t الزمن بالثواني.

23) ما سرعة رامي المتجهة بعد 6 ثواني من بدء حركته؟

24) ما تسارع رامي بعد 6 ثواني من بدء حركته؟

25) أجد قيم t التي يكون عندها رامي في حالة سكون لحظي.

07853351625

Scanned with CamScanner

مهارات التفكير العليا

26) تبرير: إذا كان: $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{(5-3x^2)^6}$ ، فأثبت أنّ $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{5+33x^2}{(5-3x^2)}$.

27) تحدَ: إذا مثل الاقتران: $s(t) = t^3 - 12t, t \geq 0$

موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني، فما سرعة الجسم عندما يكون تسارعه صفراً؟

28) تحد: إذا مثل الاقتران: $s(t) = 2t^3 - 24t - 10, t \geq 0$

موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني، فما سرعة الجسم عندما يكون تسارعه صفراً؟

0785351625

Scanned with CamScanner

الدرس الثالث
تطبيقات القيم القصوى

تمهيد للدرس

لايجاد القيم الحرجة لاقتران ما (بنخلي)

$\rightarrow f'(x) = 0 \leftarrow$

وبنطلع قيم x

عشان هيك لازم تكون بتعرف أتطلع قيم x بعد الاشتقاق

ركز معي.

حالات إيجاد قيم x بعدما نشتق.

1) الحالة العادية: x^2 أو x موجودة مرة واحدة في السؤال.

$$a)\ 2x - 8 = 0$$

$$+8 \quad +8$$

$$2x = 8 \quad (\div 2) \ \rightarrow x = 4$$

$$b)\ 2x^2 - 8 = 0$$

$$+8 \quad +8$$

$$2x^2 = 8 \quad \Rightarrow (\div 2) \ \rightarrow x^2 = 4$$

$\Rightarrow x = 2$ أو $x = -2$

2) الحالة الخدّاعة: السؤال حدّين فيه بكل حد

x أو x^2 أو x^3

بنحله بالعامل المشترك

$$a)\ 2x^2 - 4x = 0$$

$$2x(x - 2) = 0$$

إما

$$2x = 0 \Rightarrow (\div 2) \ \rightarrow x = 0$$

أو

$$x - 2 = 0 \ \Rightarrow x = 2$$

$$b)\ x^3 - x^2 = 0$$

$$x^2(x - 1) = 0$$

$x = 0$ أو $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

3) حالة السوبر: ثلاث حدود في السؤال

عددا\ $x^2 \backslash x$ ← عبارة تربيعية.

$$a)\ x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$(x - 4)(x + 2) = 0$$

إما $x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$

أو $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

4) حالة السوبر ماركت: ثلاث حدود

عددا\ $x^2 \backslash x$ ← بس بكون مع x^2 عدد بتقسم

$$a)\ 2x^2 + 4x - 16 = 0 \ \rightarrow (\div 2)$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$(x + 4)(x - 2) = 0$$

$= -4$ أو $x = 2$

5) حالة المقص: ثلاث حدود

عددا\ $x^2 \backslash x$ ← بس بكون مع x^2 عدد ما بتقسم

$$a)\ 2x^2 - 3x - 5 = 0$$

بطريقة المقص

$\div$ $2\ x^2 - 3x - 5 = 0$

$\times$

10

$-\frac{5}{2} \quad \frac{2}{2}$

$-\frac{5}{2x} \quad \frac{+1}{x}$

$$(x + 1)(2x - 5) = 0$$

$x = -1$ أو $2x - 5 = 0$

$$\frac{2x}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

0785351625

Scanned with CamScanner

$b)\ 3x^2 - 2x - 5 = 0$

$\times$ $\div$

15

$-\frac{5}{3}$ $\frac{3}{3}$

$-\frac{5}{3x}$ $\frac{+1}{x}$

$(x+1)(3x-5)$

$x = -1$ $x = \frac{5}{3}$

هسه بنروح على القيم الحرجة واحنا مرتاحين

تذكر عشان أتطلع القيم الحرجة

خلّي $f'(x) = 0$

أشتق وخليها تساوي الصفر

مثال

جد القيم الحرجة لكل اقتران مما يأتي ، ثم حدد نوعها باستعمال المشتقة الأولى:

$1)\ f(x) = 2x^3 - 3x^2$

الحل

نجعل $f'(x) = 0$

$f'(x) = 6x^2 - 6x = 0$

$6x(x-1) = 0$ عامل مشترك

إما

$\underline{6x}_{0} = \underline{0}_{0}$

$\Rightarrow x = 0$

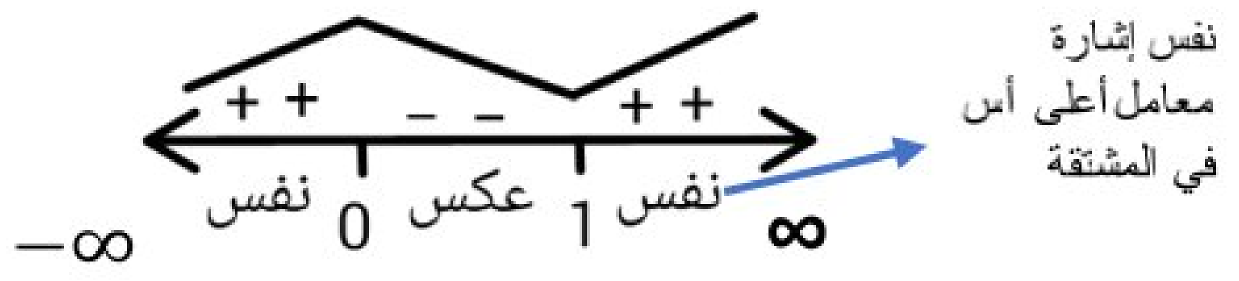
أو

$x - 1 = 0$
$\quad {}_{+1} \quad {}_{+1}$

$\Rightarrow x = 1$

القيم الحرجة $\{0,1\}$

عشان نحدد نوعها بدنا ندرس الإشارة



بتتذكر انه القيم القصوى إما رح تكون قيم عظمى محلية أو قيم صغرى محلية .

عند $x = 1$ (قاع) قيمة صغرى محلية هي -1 $f(1) = -1$

عند $x = 0$ (قمة) قيمة عظمى محلية هي 0 $f(0) = 0$

$2)\ f(x) = x^2 - 9$

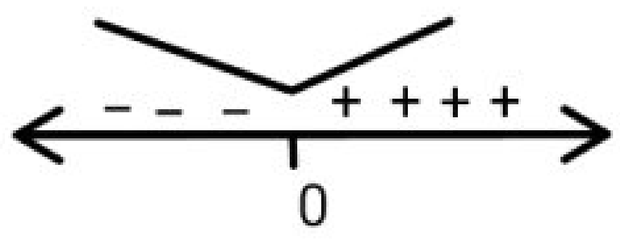
الحل

$f'(x) = 0$

$\underline{2x}_{2} = \underline{0}_{2} \rightarrow x = 0$

القيم الحرجة $x = 0$

لتحديد نوعها



عند $x = 0$ (قاع) قيمة صغرى محلية هي -9 $f(0) = -9$

0785351625

Scanned with CamScanner

3) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

الحل

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0$$

اقسم على (3)

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x-3)\quad(x-1)$$

إما

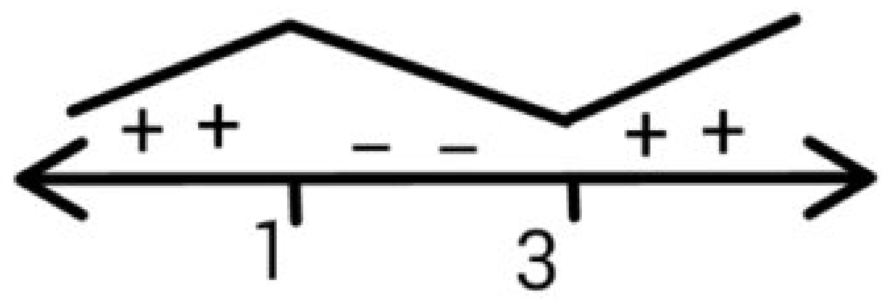
$$6x = 0$$
$$+3 \quad +3$$
$$\Rightarrow x = 3$$

أو

$$x - 1 = 0$$
$$+1 \quad +1$$
$$\Rightarrow x = 1$$

القيم الحرجة : $\{3, 1\}$

لتحديد نوعها :



عند $x = 1$ عظمى محلية هي $f(1) = 4$

عند $x = 0$ صغرى محلية هي $f(3) = 0$

تصنيف القيم الحرجة باستعمال اختبار المشتقة الثانية

بلش الدرس

تعلمنا في التمهيد كيف انطلع

القيمة الحرجة باختبار المشتقة الأولى

هسه رح نحدد نوع القيم الحرجة باستعمال اختبار المشتقة الثانية

طبعاً ما تنسى أنواع القيم الحرجة (القيم القصوى)

قيم عظمى محلية

قيم صغرى محلية

اختبار المشتقة الثانية

إذا كانت c هي قيمة حرجة

حيث $f'(c) = 0 \leftarrow$ فإن:

إذا كان : $f''(c) < 0$ ، فإن $f(c)$ هي قيمة عظمى محلية

إذا كان : $f''(c) > 0$ ،فإن $f(c)$ هي قيمة صغرى محلية

إذا كان : $f''(c) = 0$ ، فإن اختبار المشتقة الثانية يفشل في هذه الحالة نستعمل المشتقة الأولى.

0785351625

Scanned with CamScanner

مثال 1

اذا كان $f(c) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ استعمل اختبار المشتقة الثانية لايجاد القيم القصوى المحلية للاقتران f.

الحل

1) نجد القيم الحرجة أولاً

$$f'(c) = 0 \rightarrow$$
$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$$
$$6x^2 + 6x - 12 = 0$$
$$x^2 + x - 2 = 0$$
$$(x+2)(x-1) = 0$$

اما $x + 2 = 0 \rightarrow x = -2$

او $x - 1 = 0 \rightarrow x = +1$

اذن القيم الحرجة هي $x = -2$ و $x = +1$

2) نجد المشتقة الثانية

$$f''(x) = 12 + 6$$

3) نعوض القيم الحرجة في المشتقة الثانية لتصنيفها

$$f''(-2) = 12(-2) + 6 = -18 < 0$$
$$f''(1) = 12(2) + 6 = 18 > 0$$

اذن بما ان $f''(-2) < 0$ سالبة توجد قيمة عظمى محلية عند $x = -2$ وهي $f''(-2) = 20$

وبما ان $f''(1) > 0$ توجد قيمة صغرى محلية عند $x = 1$ وهي $f''(1) = -7$

مثال 2

إذا كان : $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$

استعمل اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم القصوى المحلية

الحل

$$f'(x) = 4x + 4$$
$$f'(x) = 0 \rightarrow 4x + 4 = 0$$
$$4x = -4$$
$$x = -1$$

القيمة الحرجة: $x = -1$

$$f''(x) = 4$$

نعوض القيم الحرجة لتحديد نوعها

(موجبة) $f''(-1) = 4 > 0$

اذا عند $x = -1$ قيمة صغرى محلية هي

$$f(-1) = -5$$

مثال 3

جد القيم القصوى باختبار المشتق الثانية اذا كان:

$$f(x) = 2x^3 - 6x$$

الحل

نجد القيم الحرجة

$$f'(x) = 0 \rightarrow f'(x) = 6x^2 - 6 = 0$$

$6x - 6 = 0 \quad \sqrt{x^2} = \sqrt{1}$

القيم الحرجة: $x = 1$ و $x = -1$

2) نجد $f''(x)$

$$f''(x) = 12x$$

0785351625

Scanned with CamScanner

3) نعوض القيم الحرجة في $f''(x)$

$$f''(1) = 12 < 0$$

قيمة صغرى محلية عند $x = 1$ هي $f(1) = -4$

$$f''(-1) = -12 < 0$$

قيمة عظمى محلية عند $x = -1$ هي $f(-1) = 4$

مثال 4

جد القيم القصوى باختبار المشتقة الثانية وحدد نوعها للاقتران $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 1$

الحل

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 3 = 0$$

$$(x-3)(3x-1) = 0$$

$$x - 3 = 0 \quad 3x - 1 = 0$$

$$x = 3 \quad x = \frac{1}{3}$$

القيم الحرجة: $\{3\ ,\frac{1}{3}\}$ نجد $f''(x) \leftarrow$

2) $f''(x) = 6x - 10$

3) نعوض القيم الحرجة

$$f''(3) = 6(3) - 10 = 8 > 0$$

قيمة صغرى محلية عند $x=3$ هي $f(3) = 8$

$$f''\left(\frac{1}{3}\right) = 6\left(\frac{1}{3}\right) - 10 = -8 < 0$$

قيمة عظمى محلية عند $x = \frac{1}{3}$ هي $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{-68}{27}$

مثال 5

استعمل اختبار المشتقة الثانية لايجاد القيم القصوى للاقتران $f(x) = x^3(x-2)$

الحل

نجهز الاقتران

$$f(x) = x^4 - 2x^3$$

1) نجد الان القيم الحرجة

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 0$$

$$2x^2(2x-3) = 0$$

إما $2x^2 = 0$

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

أو $2x - 3 = 0 \rightarrow \frac{2x}{2} = \frac{3}{2}$ أو

$$x = \frac{3}{2}$$

القيم الحرجة :

$$x = 0\ , x = \frac{3}{2}$$

2) نجد $f''(x)$

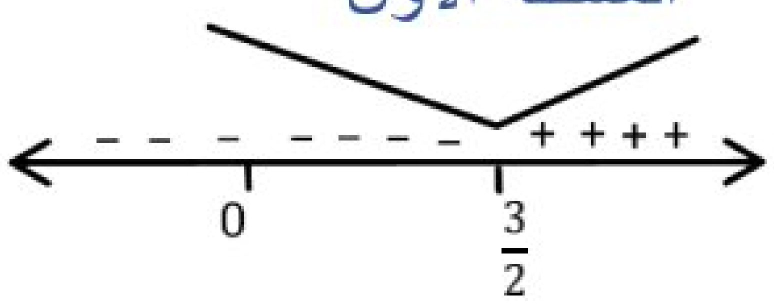
$$f''(x) = 12x^2 - 12x$$

3) نعوض القيم الحرجة

$$f''(0) = 0$$

ركز : لاحظ هنا أن

$f''(0) = 0$ يعني أن اختبار المشتقة الثانية فشل فنطبق المشتقة الأول



ركز معي :هنا لكي أعرف الاشارة على خط الاعداد نعوض قيم في $f'(x)$ وبنشوف اشارتها

القيم القصوى :

عند $x = \frac{3}{2}$ قيمة صغرى محلية هي $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{16}$

عند $x = 0$ لايوجد قيم قصوى

07853516 25

Scanned with CamScanner

مثال 6

$$f(x) = 16 + \frac{1}{x^2}$$

$$f'(x) = 16 - \frac{2x}{x^4} = 0$$

الضرب التبادلي

$$\frac{16}{1} = \frac{2x}{x^4} \rightarrow 16x^4 = 2x$$

$$16x^4 - 2x = 0$$

$$2x(8x^3 - 1) = 0$$

إما

$$2x = 0 \rightarrow x = 0$$

أو

$$8x^3 - 1 = 0$$

$$\rightarrow \frac{8x^3}{8} = \frac{1}{8} = \sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

قبل ان ننظر الى f'' نجهز f'

$$f'(x) = 16 - \frac{2x}{x^4}$$

$$f'(x) = 16 - \frac{2}{x^3}$$

$$f''(x) = \frac{2.3x^2}{(x^3)^2} = \frac{6x^2}{x^6} = \frac{6}{x^4}$$

نعوض القيم الحرجة

$$f''(\frac{1}{2}) = \frac{6}{\frac{1}{16}} > 0$$

قيمة صغرى محلية عند $x = \frac{1}{2}$ وهي

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 12$$

تمرين

اتحقق من فهمك

استعمل اختبار المشتقة الثانية لايجاد القيم القصوى المحلية للاقتران f فيما يلي :

1) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 5$

2) $f(x) = x^3 + 3x + 1$

07853351625

Scanned with CamScanner

مسائل تطبيقات القيم القصوى

قوانين هامة

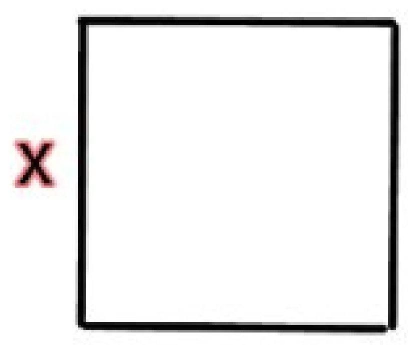
1) مساحة المربع = الطول × العرض

=(الضلع)^2

$$S = x^2$$

2) محيط المربع = 4× طول الضلع

$$m = 4x$$

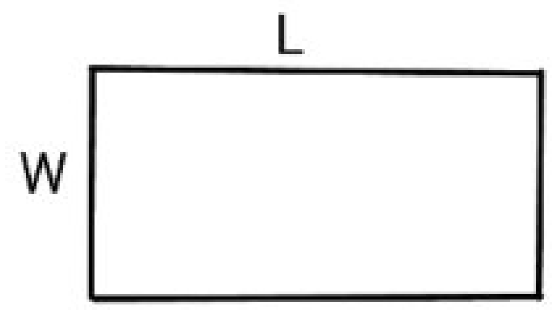


3) مساحة المستطيل = الطول × العرض

$$S = L.W$$

4) محيط المستطيل= العرض.2+ الطول.2

$$m = 2L + 2W$$

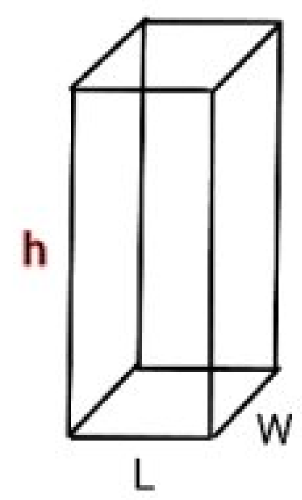


5) حجم متوازي المستطيلات=

مساحة القاعدة× الارتفاع

الطول× العرض× الارتفاع

$$V = L \times W \times h$$



6) المساحة ي لمتوازي المستطيلات=

محيط القاعدة × الارتفاع

$$S = (2L + 2W).h$$

7) المساحة الكلية لمتوازي المستطيلات

=المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين

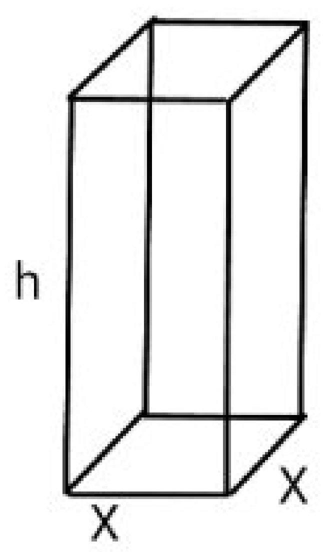
$$K = (2L + 2W).h + 2L$$

8) إذا كان متوازي المستطيلات قاعدته مربعة يكون.

حجمه = x^2h

مساحته الجانبية = $4xh$

المساحة الكلية = $4xh + 2x^2$



9) حجم المنشور= مساحة القاعدة× الارتفاع

10) مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ × طول القاعدة× الارتفاع

11) مساحة المثلث متطابق الأضلاع=

حيث x طول الضلع ← $\frac{\sqrt{3}}{4} \times x^2$

0785351625

Scanned with CamScanner

استراتيجية الحل

1) أفهم السؤال

2) حاول رسم المسألة وتحديد المتغيرات عليها

3) اكتب العلاقة الرئيسية التي يريد السؤال أن تكون أكبر أو أقل مايمكن.

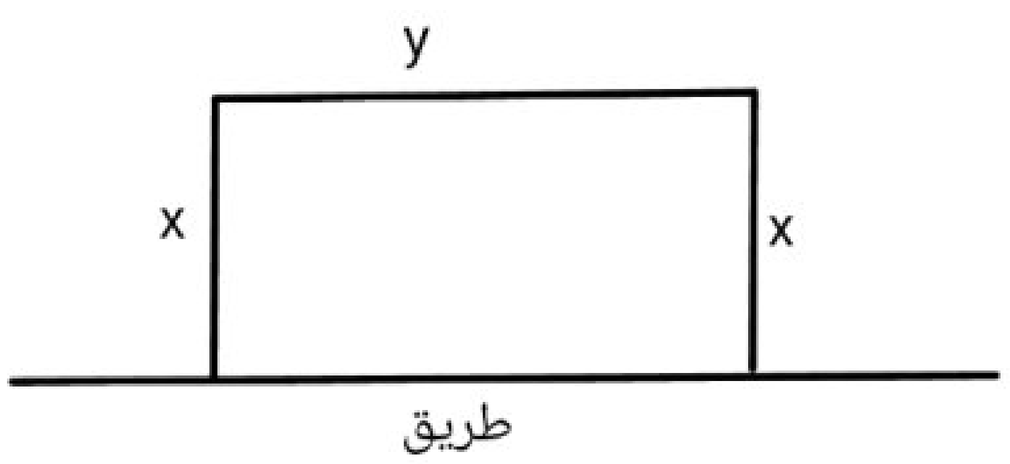
4) أكتب العلاقة المساعدة لجعل أحد المتغيرين بدلالة الآخر.

5) عوض في العلاقة الرئيسية.

6) جد القيم القصوى باختبار المشتقة الثانية.

ايجاد أكبر مساحة ممكنة

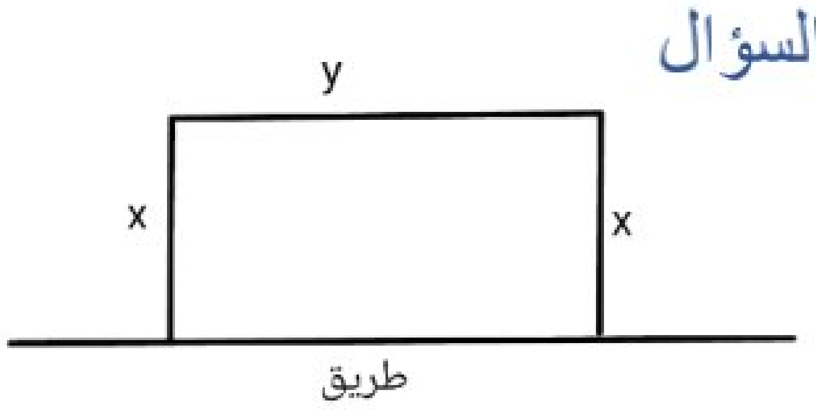
مثال 1



اشترى مزارع سياجاً طوله $800\ m$ لتسييج حقل مستطيل الشكل من مزرعته وكان هذا الحقل مقابل لطريق زراعي محاط بسياج من قبل . جد اكبر مساحة ممكنة للحقل يمكن للمزارع ان يحيط به السياج

الحل

1) ارسم مخطط السؤال



2) المطلوب اكبر مساحة ممكنة . العلاقة الرئيسية

$A = xy$ (مساحة المستطيل)

3) العلاقة المساعدة :

طول السياج = 800

$$2x + y = 800$$
$$y = 800 - 2x$$

4) نعوض في العلاقة الرئيسية

$$A = xy$$
$$A = x(800 - 2x)$$
$$A = 800x - 2x^2$$

0785351625
Scanned with CamScanner

5) نجد القيم الحرجة

$$A' = 800 - 4x$$

$$800 - 4x = 0 \Longrightarrow x = 200$$

نستعمل اختبار المشتقة الثانية لتحديد نوع القيمة الحرجة

$$A''(x) = -4$$

بما ان المشتقة الثانية سالبة فانه توجد قيمة عظمى محلية عند

$x = 200$ وهذا يعني ان الحقل تكون مساحته اكبر ما يمكن عندما يكون عرضه 200

نعوض $x = 200$ في علاقة المساحة

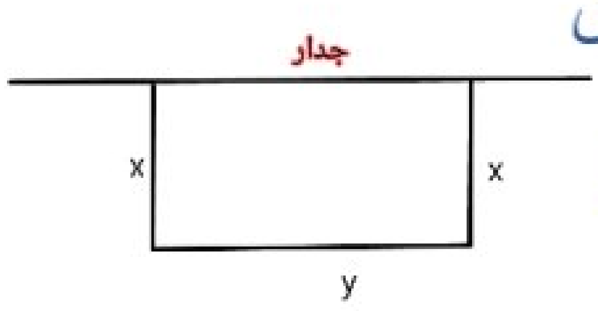
$$A(200) = 800(200) - 2(200^2)$$
$$= 80000 \text{ m}^2$$

مثال 2

حديقة منزلية على شكل مستطيل أنشئ مقابل جدار اذا كان محيط الحديقة من دون الجدار $300m$ ، جد بعدي الحديقة اللذين يجعلان مساحتها اكبر مايمكن .

الحل

1) العلاقة الرئيسية مساحة المستطيل



$$A = xy$$

2) العلاقة المساعدة :

$$2x + y = 300$$

$$y = 300 - 2x$$

3) نعوض في العلاقة الرئيسية

$$A = xy$$

$$A = x(300 - 2x)$$

$$A = 300x - 2x^2$$

4) نشتق

$$A' = 300 - 4x$$

$$300 - 4x = 0$$

القيمة الحرجة $x = 75$

5) نستعمل اختبار المشتقة الثانية لمعرفة نوع القيمة الحرجة

$$A'' = -4 < 0$$

هناك قيمة عظمة عند $x = 75$

نعوض $x = 75$ في المساحة

$$A = 300x - 2x^2$$

$$A = 300(75) - 2(75)^2 = 11250 m^2$$

تمرين

بنى نجار سقفاً خشبياً لحظيرة حيوانات وكان السقف على شكل مستطيل محيطه $54m$ جد اكبر مساحة ممكنة لسطح الحظيرة.

07853351625

Scanned with CamScanner

ايجاد أقل قيمة ممكنة

مثال 1

أراد مصنع انتاج علب من الكرتون على شكل متوازي مستطيلات مغلق بحيث يكون حجم كل منها $1000cm^3$ وقاعدتها مربعة الشكل . أجد ابعاد العلبة الواحدة التي تجعل كمية الكرتون المستعملة لصنعها اقل مايمكن .

الحل

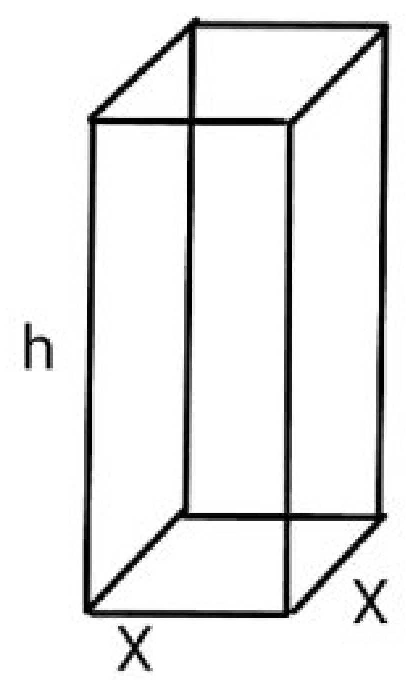
ملاحظة : كمية الكرتون المستخدمة في المصنع = المساحة الكلية لمتوازي المستطيلات

1) االعلاقة الرئيسية :

المساحة الكلية = المساحة الجانبية +مساحة القاعدتين

$S = 4\times h + 2x^2$

انه قانون المساحة الكلية لمتوازي المستطيلات قاعدته مربعة



2) العلاقة المساعدة :

الحجم = 100

$V = x^2 \times h$

$1000 = x^2 \times h$

$h = \frac{1000}{x^2}$

3) نعوض في العلاقة الرئيسية

$S = 4\times h + 2x^2$

$S = \frac{4000}{x} + 2x^2$

4) نجد القيم الحرجة

$S' = -\frac{4000}{x^2} + 4x^2 \rightarrow -\frac{4000}{x^2} + 4x = 0 \rightarrow$

$\frac{4000}{x^2} = 4x \rightarrow 4x^3 = 4000 \rightarrow x^3 = 1000 \rightarrow$

$x = 10$

$S'' = \frac{4000\times 2X}{X^4} + 4$

$S'' = \frac{8000}{X^3} + 4$

نعوض $x = 10$ $S''(10) = \frac{8000}{1000} + 4$

القيمة الصغرى المحلية $12 > 0$

$x = 10$

$\rightarrow h = \frac{1000}{x^2} = \frac{1000}{100} = 10$

اذن الابعاد 10,10,10

تمرين

أرادت احدى الشركات أن تصنع خزانات معدنية على شكل متوازي مستطيلات مغلق، بحيث يكون حجم كل منها $2m^3$ وقاعدته مربعة الشكل، أجد أبعاد الخزان الواحد التي تجعل كمية المعدن المستعملة لصنعه أقل ما يمكن .

0785351625

Scanned with CamScanner

ايجاد أكبر حجم ممكن

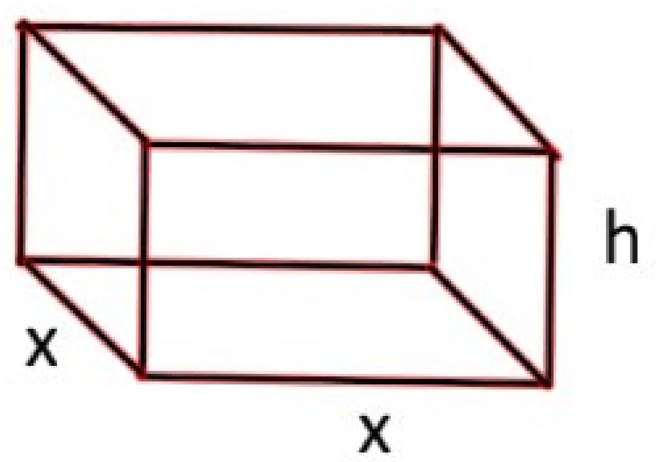
مثال 1

لدى حداد صفيحة معدنية مساحتها $36m^2$

أراد الحداد أن يصنع منها خزان ماء على شكل متوازي مستطيلات مغلق، وان تكون قاعدة الخزان مربعة الشكل جد ابعاد الخزان التي تجعل حجمه أكبر مايمكن.

الحل

1- الرسم



2- العلاقة الرئيسية:

الحجم $\rightarrow v = x^2\, h$

3- العلاقات المساعدة. المساحة الكلية.

$$S = 4 \times h + 2x^2$$

$$36 = 4 \times h + 2x^2$$

$$4 \times h = 36 - 2x^2$$

$$h = \frac{36 - x^2}{4x}$$

$$h = \frac{18 - x^2}{2x}$$

4- نعوض h في الحجم

$$v = x^2\, h$$

$$v = x^2\, (\frac{18 - x^2}{2x})$$

بالتبسيط $v = 9x - \frac{1}{2}x^3$

نشتق

$$v' = 9 - \frac{3}{2}x^2$$

$$9 - \frac{3}{2}x^2 = 0$$

$$x^2 = 6$$

$x = \pm\sqrt{6} \rightarrow (-\sqrt{6}$ تهمل لأن الطول موجب$)$

$$x = \sqrt{6}$$

$$v'' = -3x$$

$$v''(\sqrt{6}) = -3\sqrt{6} \,/\, \sqrt{6}$$

$$< 0$$

إذن هناك قيمة عظمى محلية $x = \sqrt{6}$

وهذا يعني أن الحجم أكبر ما يمكن عند $x = \sqrt{6}$

نجد $h \leftarrow h = \frac{18 - x^2}{2x}$

نعوض $x = \sqrt{6}$

$$h = \frac{18 - (\sqrt{6})^2}{2\sqrt{6}} = \frac{18 - 6}{2\sqrt{6}}$$

$$h = \frac{12}{2\sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

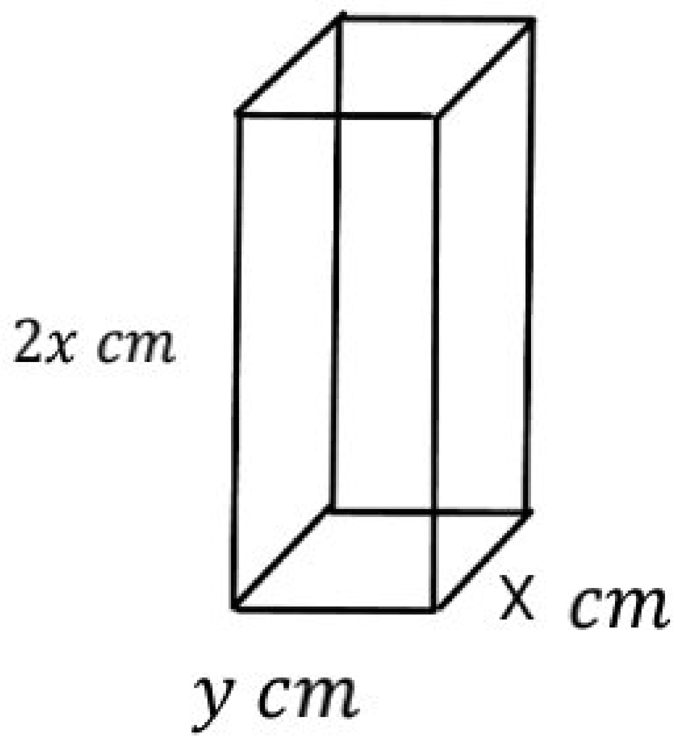
الأبعاد $\sqrt{6}$، $\sqrt{6}$، $\sqrt{6}$

0785351625

Scanned with CamScanner

مثال 2

يبين الشكل المجاور قالباً يستعمل لصنع لبنات البناء وتبلغ مساحته الكلية $600\ cm^2$ جد قيمة x التي تجعل حجم القالب أكبر مايمكن.



الحل

الشكل متوازي مستطيلات.

العلاقة الرئيسية : حجم متوازي المستطيلات

$$v = (2x)(x)(y) = 2x^2y$$

الطول. العرض. الارتفاع

العلاقة المساعدة: المساحة الكلية.

المساحة الكلية لمتوازي المستطيلات

= المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين

(محيط القاعدة× الارتفاع) + $2xy$

$$s = 2xy + (2x + 2y) \times 2x$$

$$s = 2xy + 4x^2 + 4xy$$

$$s = 6xy + 4x^2$$

$$600 = 6xy + 4x^2$$

$$6xy = 600 - 4x^2$$

$$y = \frac{600 - 4x^2}{6x}$$

$$y = \frac{100}{x} - \frac{2}{3}x$$

نعوض y في الحجم

$$v = 2x^2y$$

$$v = 2x^2\left(\frac{100}{x} - \frac{2}{3}x\right)$$

$$v = 200x - \frac{4}{3}x^3$$

نشتق $v' = 200 - 4x^2$

$$200 - 4x^2 = 0$$

$$\frac{4x^2}{4} = \frac{200}{4} \rightarrow x^2 = 50$$

$$x = \sqrt{50}$$

$$v'' = -8x$$

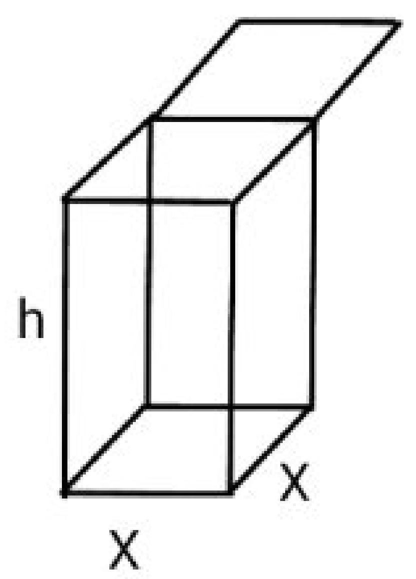
$$v''(\sqrt{50}) = -8(\sqrt{50}) < 0$$

اكبر حجم ممكن عندما $x = \sqrt{50}$

تمرين

لدى حداد صفيحة معدنية مساحتها $54m^2$ أراد الحداد أن يصنع منها خزان ماء على شكل متوازي مستطيلات مغلق وأن يكون الخزان مفتوحاً من الأعلى وقاعدته مربعة الشكل

جد أبعاد الخزان التي تجعل حجمه أكبر مايمكن.



الحل

العلاقة الرئيسية : حجم متوازي المستطيلات

$$v = x^2h$$

0785351625

Scanned with CamScanner

العلاقة المساعدة:

مساحة الاوجه+ مساحة قاعدة واحدة =54

$$4xh + x^2 = 54$$

$$4xh = 54 - x^2$$

$$h = \frac{54 - x^2}{4x}$$

$$h = \frac{27}{2x} - \frac{x}{4}$$

نعوض في v

$$v = x^2 h$$

$$v = x^2\left(\frac{27}{2x} - \frac{x}{4}\right)$$

$$v = \frac{27x}{2} - \frac{x^3}{4}$$

$$v' = \frac{27}{2} - \frac{3}{4}x^2$$

$$\frac{27}{2} - \frac{3x^2}{4} = 0$$

ضرب تبادلي $\frac{27}{2} = \frac{3x^2}{4}$

$$\frac{6x^2}{6} = \frac{27 \times 4}{6} \rightarrow x^2 = 18$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{18} \rightarrow x = \sqrt{18}$$

$$v'' = -\frac{3}{2}x$$

$$v''(\sqrt{18}) = -\frac{3}{2}\sqrt{18} < 0$$

عند $x = \sqrt{18}$ يكون للخزان أكبر حجم ممكن

$$h = \frac{27}{2x} - \frac{x}{4}$$

$$h = \frac{27}{2\sqrt{18}} - \frac{\sqrt{18}}{4}$$

تطبيقات اقتصادية

اقتران التكلفة ← $C(x)$

اقتران التكلفة الحدية ← $C'(x)$

اقتران الايراد ← $R(x)$

اقتران الايراد الحدي ← $R'(x)$

اقتران الربح ← $P(x)$

اقتران الربح الحدي ← $p'(x)$

قانون الربح:

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

الربح = الايراد – التكلفة

قانون الايراد إذا لم يكن معطى

$R(x)$ =(سعر القطعة) × (عدد القطع المبيعة)

$R(x)$ = (سعر القطعة) × (x)

أكبر ربح ممكن ← $P'(x) = 0$

0785351625

Scanned with CamScanner

مثال 1

وجد خبير تسويق انه لبيع x حاسوباً من نوع جديدي فإن سعر الحاسوب الواحد بالدينار (بالدينار) يجب أن يكون

$$s(x) = 1000 - x$$

حيث x عدد الأجهزة المبيعة، إذا اكنت تكلفة انتاج x من هذه الأجهزة تعطى بالإقتران ،

$$C(x) = 3000 + 20x$$

فأجد عدد الأجهزة التي يجب انتاجها وبيعها لتحقيق أكبر ربح ممكن.

الحل

نجد اقتران الإيراد

$R(x) =$(سعر الحاسوب الواحد) × (عدد القطع المبيعة)

$$= (1000 - x) \times (x)$$

$$= 1000x - x^2$$

$$R(x) = 1000x - x^2$$

نجد اقتران الربح

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

$$= (1000x - x^2) - (3000 + 20x)$$

$$= -x^2 - 980x - 3000$$

إذن اقتران الربح هو

$$P(x) = -x^2 - 980x - 3000$$

نجعل $P'(x) = 0$

$$P'(x) = -2x + 980$$

$$-2x + 980 = 0 \Rightarrow x = 490$$

إذن توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = 490$

نحدد نوع القيمة الحرجة عن طريق اختبار المشتقة الثانية

$$p''(x) = -2 < 0$$

بما أن المشتقة الثانية سالبة توجد قيمة عظمى محلية عند $x = 490$ تحقق الشركة اكبر ربح عند $x = 490$

مثال 2

يمثل الإقتران $s(x) = 150 - 0.5x$ سعر البدلة الرجالية لدى شركة ملابس حيث x عدد البدلات المبيعة.

ويمثل الإقتران $C(x) = 4000 + 0.25x^2$ تكلفة انتاج x بدلة :

1- جد اقتران الايردات.

2- جد اقتران الربح.

3- جد عدد البدلات اللازم بيعها لتحقيق أكبر ربح ممكن، ثم جد اكبر ربح ممكن.

4- جد سعر البدلة الواحدة الذي يحقق اكبر ربح ممكن.

الحل

1) اقتران الايرادات

$$R(x) = (\text{السعر}) \times (x)$$

$$= (150 - 0.5x).x$$

$$= 150x - 0.5x^2$$

0785351625

2) اقتران الربح

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

$$= (150x - 0.5x^2) - (4000 + 0.25x^2)$$

$$= 150x - 0.5x^2 - 4000 - 0.25x^2$$

$$= -0.75x^2 + 150x - 4000$$

3) لإيجاد عدد البدلات اللازم بيعها لتحقق أكبر ربح ممكن.

$$P'(x) = 0$$

$$P'(x) = -1.5x + 150$$

$$-1.5x + 150 = 0$$

$$\frac{1.5x}{1.5} = \frac{150}{1.5} = 100$$

لإيجاد أكبر ربح ممكن نعوض $x = 100$ في اقتران الربح $P(x)$

$$P(100) = -0.75(100)^2 + 150(100) - 4000$$

$$= 18500$$

4) سعر البدلة الذي يحقق اكبر ربح ممكن

نعوض $x = 100$ في السعر

$$s(x) = 150 - 0.5x$$

$$= 150 - 0.5\,(100)$$

$= 150 - 50 = 100$ دينار

تمرين

وجدت خبيرة تسويق انه لبيع x ثلاجة من نوع جديد، فإن سعر الثلاجة الواحدة (بالدينار) يجب أن يكون:

$$S(x) = 1750 - 2x$$

حيث x عدد الأجهزة المبايعة.

إذا كانت تكلفة x من هذه الأجهزة تعطى بالاقتران:

$$C(x) = 2250 + 18x$$

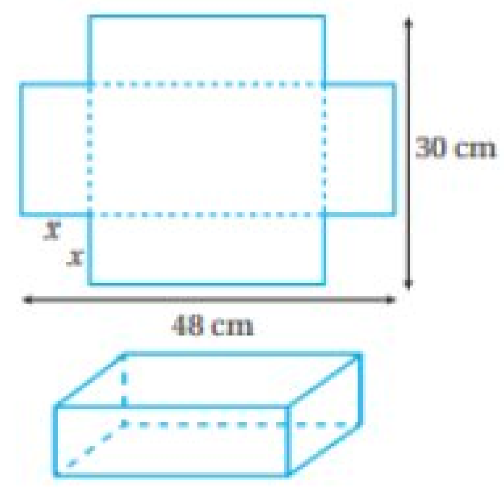
فأجد عدد الأجهزة التي يجب إنتاجها وبيعها لتحقيق أكبر ربح ممكن.

Scanned with CamScanner

أسئلة قوة

مثال 1

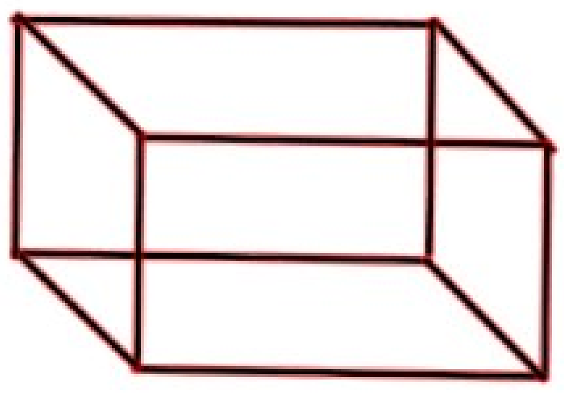
قطعة ورق مستطيلة الشكل طولها $48\ cm$ وعرضها $30\ cm$ قص من زوايا القطعة الأربعة مربعات متطابقة، طول كل منها $x\ cm$ كما في الشكل المجاور.



1) جد الاقتران الذي يمثل حجم العلبة بدلالة x

2) جد قيمة x التي تجعل حجم العلبة أكبر مايمكن.

الحل



$v' =$(الطول)×(العرض)×(الارتفاع)

$$= (48-2x)(30-2x)(x)$$
$$= (48-2x)(30x-2x^2)$$
$$= 1440x - 60x^2 - 96x^2 + 4x^3$$
$$= 4x^3 - 156x^2 + 1440x$$

نشتق لنجد v'

$$v' = 12x^2 - 312x + 1440$$
$$12(x^2 - 26x + 120) = 0$$
$$12(x-20)(x-6) = 0$$
$$x = 20 \quad or \quad x = 6$$
$$v'' = 24x - 312$$
$$v''(20) = 168 > 0$$
$$v''(6) = -168 < 0$$

اكبر ما يمكن عند $x = 6$

مثال 2

تحدٍ

قالب لصنع الكعك على شكل منشور. إذا كانت قاعدة القالب مثلثاً متطابق الأضلاع كما في الشكل المجاور وحجمه

$$500\sqrt{3}\ cm^3$$

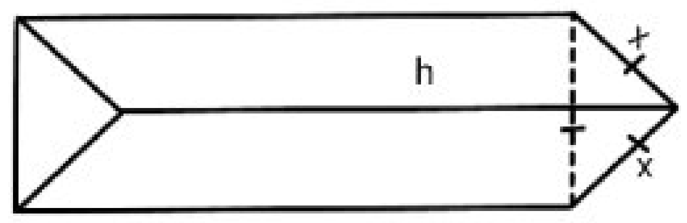
جد أبعاد القالب التي تجعل المواد المستعملة في صنعه أقل ما يمكن

الحل

العلاقة المساعدة ← حجم المنشور

$v =$(مساحة القاعدة)×(الارتفاع)

$$500\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}\ x^2\ h$$



$$500 = \frac{1}{4}x^2.h$$
$$2000 = x^2.h$$
$$h = \frac{2000}{x^2}$$

كمية المادة هي المساحة الكلية للمنشور = مساحة الاوجه + مساحة القاعدتين

$$s = 3hx + \frac{2\sqrt{3}}{4}x^2$$
$$s = 3\left(\frac{200}{x^2}\right)x + \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 = \frac{600}{x} + \frac{\sqrt{3}}{2}x^2$$

$$s' = -\frac{600}{x^2} + \sqrt{3}x = 0$$

$$\frac{600}{x^2} = \sqrt{3}x$$

$$\sqrt{3}x^3 = 600$$

$$x^3 = \frac{600}{\sqrt{3}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{600}{\sqrt{3}}}$$

أتدرب وأحل مسائل

أستعمل اختبار المشتقة الثانية لايجاد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) لكل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = x^2 - 2x + 5$

2) $f(x) = 20 + 15x - x^2 - \frac{x^3}{3}$

3) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 2$

4) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

5) $f(x) = \frac{x^2 + 9}{2x}$

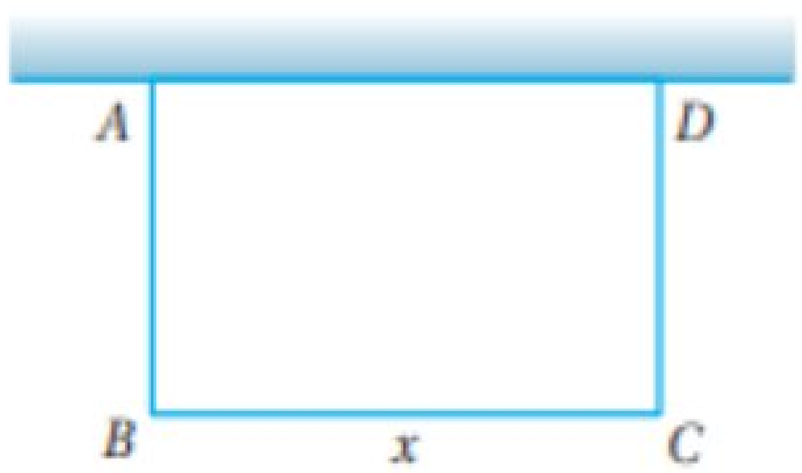
6) $f(x) = \sqrt{x}3(3 - x)$

يمثل الشكل المجاور مخططاً لحديقة منزلية على شكل مستطيل أنشئت مقابل جدار. إذا كان محيط الجديقة من دون الجدار $300\ m$ ، فأجد كلا مما يأتي:

7) المقدار الجبري الذي يمثل طول الضلع AB بدلالة x.

8) اقتران مساحة الحديقة بدلالة x.

9) بعدي الحديقة اللذين يجعلان مساحتها أكبر مايمكن.



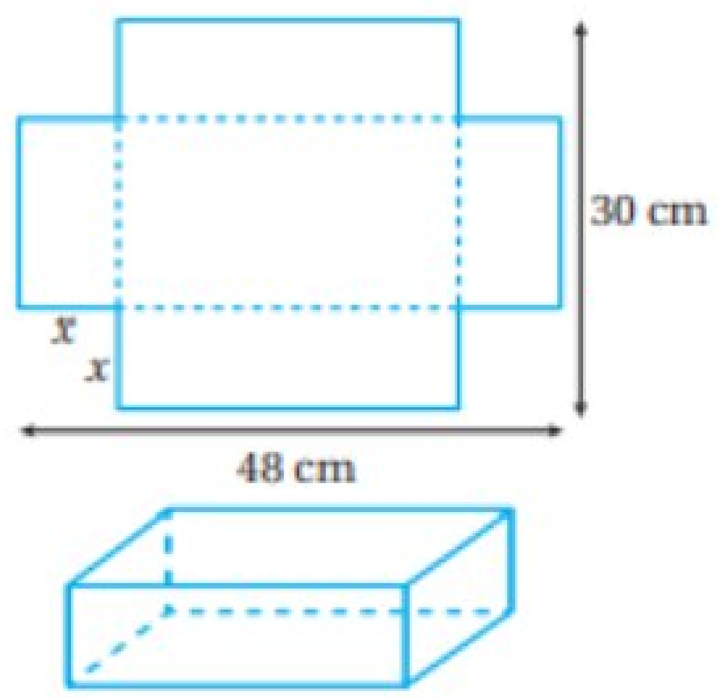
07853351625

Scanned with CamScanner

قطعة ورق مستطيلة الشكل، طولها $48cm$، وعرضها $30\ cm$. قص من زوايا القطعة مربعات متطابقة، طول ضلع كل منها $x\ cm$ كما في الشكل المجاور، ثم ثنيت لتشكل علبة:

10) أجد الاقتران الذي يمثل حجم العلبة بدلالة x.

11) أجد قيمة x التي تجعل حجم العلبة أكبرماينكن



يمثل الاقتران : $P(x) = 500 - 0.002x$

سعر منتج لإحدى الشركات ، حيث x عدد القطع المنتجة.
ويمثل الاقتران: $C(x) = 300 + 1.110x$ تكلفة انتاج x قطعة:.

12) أجد اقتران الايراد.

13) أجد اقتران الربح.

14) أجد عدد القطع اللازم بيعها من المنتج لتحقيق أكبر ربح ممكن، ثم أجد أكبر ممكن.

15) اجد سعر الوحدة الواحدة من المنتج الذي يحقق أكبر ربح ممكن.

Scanned with CamScanner

الدرس الرابع

الاشتقاق الضمني والمعدلات المرتبطة

هناك نوعين من العلاقات

← علاقة صريحة

وهي التي يمكن كتابتها بصورة

$y = f(x)$ وهي التي تعلمنا كيف نشتقها.

مثل:

$$y = \sqrt{x+1} / y = \frac{2}{x} / y = x^2$$

← وعلاقة ضمنية

لا يمكن كتابتها بصورة

$$y = f(x)$$

مثل:

$$x^3 + y^2 = 4xy$$

أو : $xy - 2x = 4y$

وتسمى عملية إيجاد $\frac{dy}{dx}$ للعلاقة الضمنية الاشتقاق الضمني

خطوات الاشتقاق الضمني

1 – اشتق طرفي المعادلة بدلالة x

2 – انقل جميع الحدود التي تحتوي على $\frac{dy}{dx}$ بطرف واحد من المعادلة.

3 – اخرج $\frac{dy}{dx}$ عامل مشترك

4 – أجد قيمة $\frac{dy}{dx}$

ملاحظة هامة

بعد أن نشتق y ضع $\frac{dy}{dx}$

مثال 1

جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يلي

1) $2x + 3y^2 = 1$

الحل

نشتق بدلالة x

$$2 + 6y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$6y\frac{dy}{dx} = -2$$

أقسم على $6x$ لايجاد $\frac{dy}{dx}$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{6y}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{3y}$$

2) $y^3 - \sin x = 4y^2$

الحل

$$3y^2\frac{dy}{dx} - \cos x = 8y\frac{dy}{dx}$$

$$3y^2\frac{dy}{dx} - 8y\frac{dy}{dx} = \cos x$$

$$\frac{dy}{dx}(3y^2 - 8y) = \cos x$$

أقسم على معامل $\frac{dy}{dx}$ $\quad 3y^2 - 8y$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{3y^2 - 8y}$$

Scanned with CamScanner

3) $xy - 2y = 3e^x$

الحل

نشتق – انتبه هناك قانون ضرب

$$x\frac{dy}{dx} + y - 2\frac{dy}{dx} = 3e^x$$

$$x\frac{dy}{dx} - 2\frac{dy}{dx} = 3e^x - y$$

$$\frac{dy}{dx}(x-2) = 3e^x - y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3e^x - y}{x-2}$$

4) $x^2 + 2xy = 3y^2$

الحل

$$2x + 2x\frac{dy}{dx} + y.2 = 6y\frac{dy}{dx}$$

$$2x\frac{dy}{dx} - 6y\frac{dy}{dx} = -2x - 2y$$

$$\frac{\frac{dy}{dx}(2x-6y)}{2x-6y} = \frac{-2x-2y}{2x-6y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x-2y}{2x-6y}$$

5) $y + y^3 = x - x^3$

الحل

$$\frac{dy}{dx} + 3y^2\frac{dy}{dx} = 1 - 3x^2$$

$$\frac{\frac{dy}{dx}(1+3y^2)}{1+3y^2} = \frac{1-3y^2}{1+3y^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-3y^2}{1+3y^2}$$

6) $xe^y - 3x = 15$

الحل

$$x.e^y\frac{dy}{dx} + e^y - 3 = 0$$

$$\frac{x.e^y.\frac{dy}{dx}}{x.e^y} = \frac{-e^y+3}{x\,e^y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-e^y+3}{x\,e^y}$$

7) $x^3 + xy^2 = 5x$

الحل

$$3x^2 + x.2y\frac{dy}{dx} + y^2 = 5$$

$$\frac{2xy\frac{dy}{dx}}{2xy} = \frac{5-3x^2-y^2}{2xy}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5-3x^2-y^2}{2xy}$$

مثال

جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يلي عند النقطة المعطاة:

ملاحظة: اشتق وعوّض النقطة مباشرة وطلع $\frac{dy}{dx}$

$a)x^2 + y^2 = 6 \quad ,(2,2)$

الحل

نشتق

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

نعوض النقطة (2,2)

$$4 + 4\frac{dy}{dx} = 0$$

طلّع قيمة $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{4\frac{dy}{dx}}{4} = -\frac{4}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -1$$

Scanned with CamScanner

خطوات إيجاد الاشتقاق الضمني عند نقطة

1) اشتق

2) عوّض النقطة

3) جد $\frac{dy}{dx}$

$b)\ x^2y - 2x^3 - y^3 + 1 = 0$

عند $(2,-3)$

الحل

نشتق

$$x^2\frac{dy}{dx} + y.2x - 6x^2 - 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

نعوّض $(2,-3)$

$$(2)^2\frac{dy}{dx} + (-3).2(2) - 6(2)^2 - 3(-3)^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$4\frac{dy}{dx} + \ -12 - 24 - 27\frac{dy}{dx} = 0$$

$$4\frac{dy}{dx} - 36 - 27\frac{dy}{dx} = 0$$

$$-\frac{23}{-23}\frac{dy}{dx} = \frac{36}{-23}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{36}{23}$$

تمرين
تحقق من فهمك

جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يلي:

$a)\ x^2 + y^2 = 2$

$b)\ 5y^2 - 2e^x = 4y$

$c)\ xy + y^2 = 4\cos x$

$d)\ y^2 = \ln x$ عند $,(e,1)$

$e)\ (y-3)^2 = 4x - 20\ ,(6,1)$

$f)\ 2x^2 - 3y^3 = 5\ ,(-2,1)$

الأجوبة:

$a)\ \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

$b)\ \frac{dy}{dx} = \frac{2e^x}{10y-4}$

$c)\ \frac{dy}{dx} = \frac{-4\sin x - y}{x+2y}$

$d)\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$

$e) -1$

$f) -\frac{8}{9}$

07853351625

Scanned with CamScanner

معادلة المماس لمنحنى علاقة ضمنية

تذكر أن معادلة المماس:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

مثال 1

جد معادلة المماس لمنحنى العلاقة:

$$y^3 + xy = 2$$

عند $(1,1)$

الحل

$$x_1 = 1 \ , \ y_1 = 1$$

نشتق ضمنياً لإيجاد الميل

الميل = $\frac{dy}{dx}$ عند النقطة $(1,1)$

$$3y^2\frac{dy}{dx} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

نعوّض $(1,1)$

$$3\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} + 1 = 0$$

$$4\frac{dy}{dx} + 1 = 0$$

$$\frac{4}{4}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{4}$$

الميل $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{4}$

معادلة المماس:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = -\frac{1}{4}(x - 1)$$

$$y - 1 = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \rightarrow y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$$

مثال 2

إذا كان

$$y^2 - x^2 = 16$$

جد ما يلي:

a) ميل المماس عند النقطة (3,5)

b) معادلة المماس عند النقطة (3,5)

الحل

a) نشتق ضمنياً لإيجاد $\frac{dy}{dx}$ عند $(3,5)$

$$2y\frac{dy}{dx} - 2x = 0$$

نعوّض $(3,5)$

$$10\frac{dy}{dx} - 6 = 0$$

$$\frac{10\,\frac{dy}{dx}}{10} = \frac{6}{10} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{6}{10}$$

ميل المماس

$$\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

b) معادلة المماس:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$x_1 = 3 \, , y_1 = 5 \, , m = \frac{3}{5}$$

$$y - 5 = \frac{3}{5}(x - 3)$$

$$y - 5 = \frac{3}{5}x - \frac{9}{5}$$

$$y = \frac{3}{5}x + \frac{16}{5}$$

0785351625

Scanned with CamScanner

مثال 3

إذا كان $x^2y = 8 - 4y$

جد:

a) ميل المماس عند $(2,1)$

b) معادلة المماس عند $(2,1)$

الحل

a) نشتق ضمنياً

$$x^2\frac{dy}{dx} + y.2x = -4\frac{dy}{dx}$$

نعوّض $(2,1)$

$$4\frac{dy}{dx} + 4 = -4\frac{dy}{dx}$$

$$4\frac{dy}{dx} + 4\frac{dy}{dx} = -4$$

$$\frac{8\frac{dy}{dx}}{8} = -\frac{4}{8} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$$

b) $x_1 = 2\,, y_1 = 1\,, m = -\frac{1}{2}$

معادلة المماس:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 2)$$

$$y - 1 = -\frac{1}{2}x + 1$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 2$$

تمرين

تحقق من فهمك

1) جد معادلة المماس لمنحنى العلاقة:

$x^3 + 2y^3 = 6$

عند النقطة $(2, -1)$

← ج: $(y + 1) = -2(x - 2)$

2) إذا كان:

$x^2 + 4xy + y^2 = 25$

جد ما يلي:

a) ميل المماس عند النقطة $(0,5)$

b) معادلة المماس عند النقطة $(0,5)$

ج:a) الميل =-2

b) $y - 5 = -2x$

جميل

3) جد معادلة المماس لمنحنى العلاقة:

$x^2 + 6y^2 = 10$

عند $x = 2$

ج: 1) $(y - 1) = -\frac{1}{3}(x - 2)$

2) $(y + 1) = \frac{1}{3}(x - 2)$

0785351625

Scanned with CamScanner

اثبات

1) إذا كان

$$\ln(xy) = x^2 + y^2$$

أثبت أن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2y - y}{x - 2xy^2}$$

الحل

نشتق

$$\frac{x.\frac{dy}{dx} + y}{x.y} = \frac{2x + 2y.\frac{dy}{dx}}{1}$$

$$x\frac{dy}{dx} + y = 2x^2y + 2xy^2\frac{dy}{dx}$$

$$x\frac{dy}{dx} - 2xy^2\frac{dy}{dx} = 2x^2y - y$$

$$\frac{dy}{dx}\frac{(x - 2xy^2)}{x - 2xy^2} = \frac{2x^2y - y}{x - 2xy^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2y - y}{x - 2xy^2}$$

المعدلات المرتبطة

قوانين هامة

1) مساحة الدائرة بدلالة نصف قطرها:

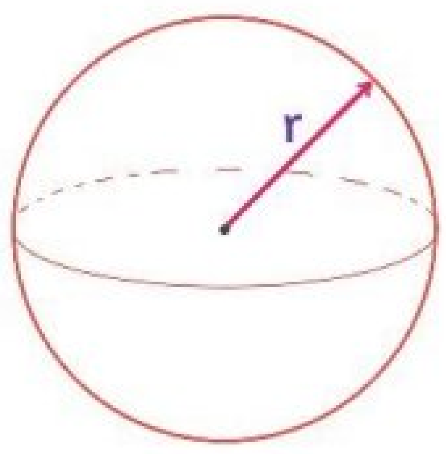
$$A = \pi r^2$$

2) محيط الدائرة بدلالة نصف قطرها:

$$A = 2\pi r$$

3) حجم الكرة بدلالة نصف قطرها:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

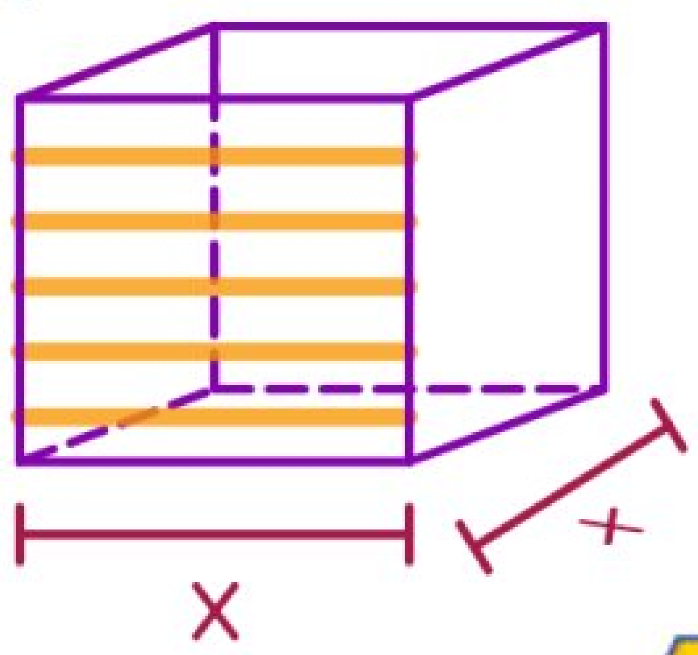


4) مساحة سطح الكرة بدلالة نصف قطرها:

$$A = 4\pi r^2$$

5) حجم المكعب بدلالة طول ضلعه:

$$V = x^3$$



07853351625

Scanned with CamScanner

6) المساحة الجانبية للمكعب:

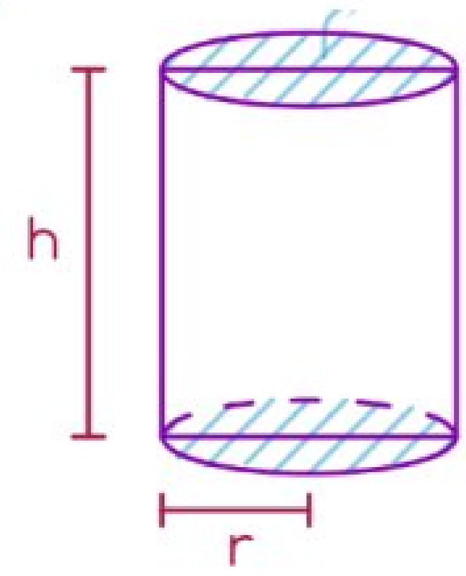
$$s = 4x^2$$

7) المساحة الكلية للمكعب:

$$s = 6x^2$$

8) حجم الأسطوانة:

$$V = \pi r^2 h$$



9) المساحة الجانبية للاسطوانة:

$$s = 2\pi rh$$

10) المساحة الكلية للاسطوانة:

$$s = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

ملاحظات

1) الاشتقاق هنا سيكون بالنسبة للزمن t يعني مشتقة

$$V = 2r^2$$

$$\frac{dv}{dt} = 4r\frac{dr}{dt}$$

كل اشي بنشتقه بنحط وراه $\frac{dv}{dt}$

2) يزداد معدل التغير موجب

3) يقل معدل التغير سالب

خطوات الحل

1) نكون علاقة بين المتغيرات.

2) نشتق بالنسبة للزمن.

3) نعوض القيم المعطاة.

4) نجد القيم المجهولة.

مثال1

عند رمي حجر في مسطح مائي، تتكون موجات دائرية متحدة المركز إذا كان نصف قطر دائرة يزداد بمعدل $8cm/s$ فأجد معدل تغير مساحة هذه الدائرة عندما يكون نصف قطرها $10\ cm$ علماً أن العلاقة التي تربط مساحة الدائرة (A) ونصف قطرها (r) هي: $A = \pi r^2$

الحل

المعادلة: $A = \pi r^2$

معدل التغير المعطى $\frac{dr}{dt} = 8$

المطلوب: $\left.\frac{dA}{dt}\right|_{r=10}$

نشتق المعادلة بالنسبة للزمن

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r\frac{dr}{dt}$$

نعوّض $\frac{dA}{dt} = 2\pi(10)(8)$

$$\frac{dA}{dt} = 16\pi$$

إذن تزداد مساحة الدائرة بمعدل $16\ \pi\frac{cm^2}{s}$ عندما

$$r = 10\ cm$$

0785351625

Scanned with CamScanner

مثال2

نفخت هديل بالوناً على شكل كرة فازداد نصف قطره بمعدل 3cm/s، أجد معدل تغير حجم البالون عندما يكون نصف قطره 4 cm علماً بأن العلاقة التي تربط بين حجم البالون (V) ونصف قطره r هي:

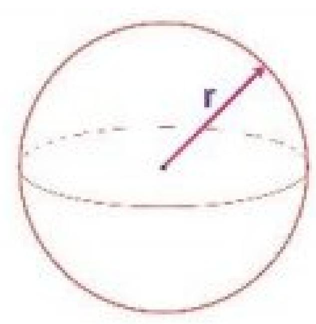
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

الحل

المعادلة: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

المعطيات:

$$\frac{dr}{dt} = 3\frac{cm}{s}$$



المطلوب: $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{r=4}$

نشتق المعادلة بالنسبة للزمن

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

نعوّض

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi(4)^2(3)$$

$$\frac{dV}{dt} = 192\pi$$

مثال3

يخرج الهواء من منطاد كروي الشكل بمعدل ثابت مقداره $0.6\ cm^3/s$، أجد معدل تناقص قطر المنطاد في اللحظة التي يكون فيها نصف القطر $2\ m$.

الحل

المعادلة التي تربط حجم الكرة بنصف قطرها هي:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

ملاحظة هامة:

لاحظ هنا أن الهواء يخرج من المنطاد يعني أن حجمه يقل

إذن: $\frac{dv}{dt} = -0.6$

السالب لأن الحجم يقل

المطلوب: $\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=2.5}$

نشتق المعادلة بالنسبة للزمن

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\frac{dv}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$-0.6 = 4\pi(2)^2 \frac{dr}{dt}$$

$$0.6 = 16\pi \frac{dr}{dt}$$

$$16\pi \qquad 16\pi$$

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{0.6}{16\pi}$$

Scanned with CamScanner

مثال4

يزداد نصف قطر فقاعة صابون كروية الشكل بمعدل $0.5\ cm/s$ أجد سرعة زيادة مساحة الفقاعة عندما يكون طول نصف قطرها $3\ cm$ علماً بأن العلاقة التي تربط بين مساحة سطح الفقاعة (A) ونصف قطرها (r) هي:

$$A = 4\pi r^2$$

الحل

المعادلة: $A = 4\pi r^2$

المعطيات: $\left.\frac{dA}{dt}\right|_{r=3}$

نشتق بالنسبة للزمن $A = 4\pi r^2$

$$\frac{dA}{dt} = 8\pi r\,\frac{dr}{dt}$$

نعوّض

$$\frac{dA}{dt} = 8\pi(3)(0.5)$$

$$\frac{dA}{dt} = 12\pi$$

مثال5

اتخذ ورم شكلاً كروياً تقريباً وقد ازداد نصف قطره بمعدل $0.13\ cm$ لكل شهر، أجد معدل تغير حجم الورم عندما يكون طول نصف قطره $0.45\ cm$ علماً بأن العلاقة التي تربط بين حجم الورم (V) ونصف قطره (r) $V = \frac{3}{4}\pi r^3$

الحل

المعادلة: $V = \frac{3}{4}\pi r^3$

المعطيات $\frac{dr}{dt} = 0.13$

المطلوب: $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{r=0.45}$

نشتق بالنسبة للزمن:

$$V = \frac{3}{4}\pi r^3$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{9}{4}\pi r^2\,\frac{dr}{dt}$$

نعوّض

$$\frac{dV}{dt} = \frac{9}{4}(\pi)(0.45)^2(0.13) = 0.059$$

0785351625

Scanned with CamScanner

مثال6

تتناقص أطوال أضلاع مكعب بمعدل $6\frac{cm}{s}$

جد معدل تغير حجم المكعب عندما يكون ضلعه $30\ cm$ علماً بأن العلاقة التي تربط بين حجم المكعب (V) وطول ضلعه (x) هي

$$V = x^3$$

الحل

المعادلة: $V = x^3$

المعطيات: $\frac{dx}{dt} = -6$

السالب لأنها تتناقص

المطلوب: $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{x=30}$

نشتق بالنسبة للزمن

$$V = x^3$$

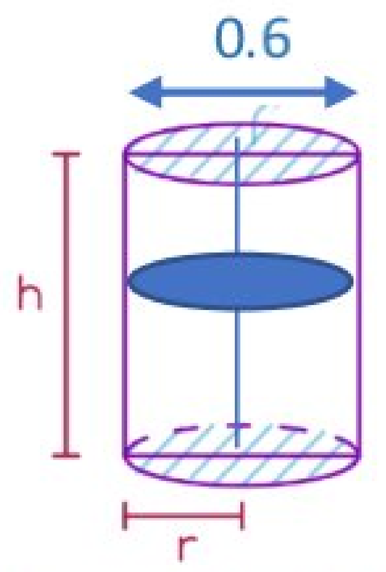
$$\frac{dv}{dt} = 3x^2\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = 3(30)^2(-6)$$

$$\frac{dv}{dt} = -16200$$

مثال7

يبين الشكل المجاور خزان ماء اسطواني الشكل



إذا كانت كمية الماء في الخزان تزداد بمعدل $0.4\ m^3/s$ فأجد معدل تغير عمق الماء فيه (h) علماً أن العلاقة التي تربط بين حجم الخزان (V) وارتفاعه (h) هي:

$$V = \pi r^2 h$$

الحل

المعادلة: $V = \pi r^2 h$

المعطيات: $\frac{dv}{dt} = 0.4$

المطلوب:

$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{r=0.3}$ من الشكل

نشتق المعادلة:

$$V = \pi r^2 h$$

لكن $(r = 0.3)$ ثابتة لا تتغير نعوضها قبل الاشتقاق

$$V = \pi(0.3)^2 h$$

$$v = 0.09\ h$$

$$\frac{dv}{dt} = 0.09\frac{dh}{dt}$$

$$0.4 = 0.09\frac{dh}{dt} \rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{0.4}{0.09} = \frac{4}{0.9}$$

ملاحظة: في الأسطوانة نصف القطر لا يتغير نعوضه قبل أن نشتق دائماً.

0785351625

Scanned with CamScanner

مثال8

قوي: سؤال أبو فكرة

إذا كان المتغيران u و w مرتبطين بالعلاقة:

$$u = 150\sqrt[3]{w^2}$$

وكانت قيمة المتغير w تزداد بمرور الزمن t وفقاً للعلاقة: $w = 0.05\,t + 8$

جد معدل تغير u بالنسبة إلى الزمن عندما $w = 64$

الحل

المعادلة:

$$u = 150\sqrt[3]{w^2}$$

المعطيات: $w = 0.05\,t + 8$

نشتقها بالنسبة للزمن لنجد $\frac{dw}{dt}$

$$\frac{dw}{dt} = 0.5\frac{dt}{dt} \to \frac{dw}{dt} = 0.5$$

المطلوب:

$$\left.\frac{du}{dt}\right|_{w=64}$$

نشتق:

$$u = 150\sqrt[3]{w^2}$$

تجهيز $u = 150\, w^{\frac{2}{3}}$

$$\frac{du}{dt} = 100\, w^{-\frac{1}{3}}.\frac{dw}{dt}$$

نعوّض

$$\frac{du}{dt} = 100(64)^{-\frac{1}{3}}.0.5$$

$$= 100 \times \frac{1}{4} \times 0.5 = \frac{50}{4} = \frac{25}{2}$$

تمارين

1) يزداد طول نصف قطر دائرة بمعدل $4\ cm/s$ جد معدل تغير مساحة هذه الدائرة عندما يكون طول نصف قطرها $6\ cm$ علماً أن العلاقة بين مساحة الدائرة (A) وطول نصف قطرها (r) هي

$$A = \pi r^2$$

الحل:

← ج : $\frac{dA}{dt} = 48\pi$

2) نفخ عادل كرة قدم: فازداد نصف قطرها بمعدل $2\ cm/s$ جد معدل تغير حجم الكرة عندما يكون طول نصف قطرها $4\ cm$ علماً أن العلاقة التي تربط بين حجم الكرة (V) ونصف قطرها (r) هي:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

الحل:

← ج : $\frac{dv}{dt} = 128\,\pi$

Scanned with CamScanner

3) تسرب نفط من ناقلة بحرية مكونة بقعة دائرية الشكل على سطح الماء، تزداد مساحتها بمعدل $50\frac{m^2}{mm}$ أجد سرعة تزايد نصف قطر البقعة عندما يكون طول نصف قطرها $20\ m$ علماً بأن العلاقة التي تربط مساحة الدائرة (A) ونصف قطرها (r) هي $A = \pi r^2$

الحل:

← ج : $\frac{dr}{dt} = 5/4\ \pi$

4) نفخت سارة بالوناً على شكل كرة فازداد حجمه بمعدل $800\ cm^3/s$ جد معدل زيادة نصف قطر البالون عندما يكون طول نصف قطره $60\ cm$ علماً أن العلاقة التي تربط بين حجم البالون (V) ونصف قطره (r) هي:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

الحل:

← ج : $\frac{dr}{dt} = \frac{8}{114\pi} = \frac{1}{18\pi}$

أتدرب وأحل مسائل

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يلي:

1) $x^2 - 2y^2 = 4$

2) $x^2 + y^3 = 2$

3) $x^2 + 2y - y^2 = 5$

4) $2xy - 3y = y^2 - 7x$

5) $y^5 = x^3$

6) $x^2y^3 + y = 11$

7) $\sqrt{x} + \sin y = 16$

8) $e^x y = xe^y$

9) $\cos x + \ln y = 3$

10) $16y^2 - x^2 = 16$

11) $x^2 - y^2 - 4x + 6y = 9$

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي عند النقطة المعطاة:

12) $3x^3 - y^2 = 8$, $(2,4)$

13) $2x^2 - y^3 = 5$, $(-2,1)$

14) $y^2 = \ln x$, $(e,1)$

15) $(y-3)^2 = 4x - 20$, $(6,1)$

إذا كان : $2x^2 + y^2 = 34$ ، فأجد كلاً مما يأتي:

16) ميل المماس عند النقطة $(3,4)$.

17) معادلة المماس عند النقطة $(3,4)$.

0785351625

Scanned with CamScanner

إذا كان : $y^2 + xy + x^2 = 7$، فأجد كلاً مما يأتي:

18) ميل المماس عند النقطة $(3, -2)$.

17) معادلة المماس عند النقطة $(3, -2)$.

19) معادلة العمودي المماس عند النقطة $(3, -2)$.

21) هندسة: تتناقص أطوال أضلاع مكعب بمعدل $6\ cm / s$. أجد معدل تغير حجم المكعب عندما يكون طول ضلعه $30\ cm$، علماً بأن العالقة التي تربط حجم المكعب (V) وطول ضلعه (x) هي $V = x^3$.

22) فقاقيع: يزداد نصف قطر فقاعة صابقن كروية الشكل بمعدل $0.5\ cm/s$. أجد سرعة زيادة مساحة سطح الفقاعة عندما يكون طول نصف قطرها $3cm$، علماً التي تربط بين مساحة سطح الفقاعة (A) ونصف قطرها (r). هي $A = 4\pi r^2$

مهارات التفكير العليا

24) تبرير: أجد معادلة المماس لمنحني العلاقة

$$x^2 + 6y^2 = 10$$

عندما $x = 2$، مبرراً اجابتي.

25) تحد: إذا كان: $\ln(xy) = x^2 + y^2$، فأثبت أن:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2y - y}{x - 2xy^2}$$

26) تبرير: إذا كان المتغيران w, u مرتبطين بالعلاقة:

$u = 150\sqrt[3]{w^2}$، وكانت قيمة المتغير w تزداد بمرور الزمن t وفقاً للعلاقة: $w = 0.05t + 8$، فأجد معدل تغير u بالنسبة إلى الزمن عندما $w = 64$، مبرراً اجابتي.

اختبار نهاية الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كل ممايأتي:

1) ميل المماس لمنحني الاقتران: $y = x^2 + 5x$، عندما $x = 3$ هو:

$a)24$ $\qquad$ $b)\frac{-5}{2}$

$c)11$ $\qquad$ $d)8$

2) إذا كان : $f(x) = x - \frac{1}{x}$، فإن $f''(x)$ هي:

$a)1 + \frac{1}{x^2}$ $\qquad$ $b)1 - \frac{1}{x^2}$

$c)\frac{2}{x^3}$ $\qquad$ $d) -\frac{2}{x^3}$

3) إذا كان $y^2 - x^2 = 1$، فإن ميل المماس لمنحني العلاقة عند النقطة $(1, \sqrt{2})$ هو.

$a) -\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\qquad$ $b) -\sqrt{2}$

$c) -\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\qquad$ $d)\sqrt{2}$

4) ميل العمودي على المماس لمنحني العلاقة:

$3x - 2y + 12 = 0$ هو:

$a)6$ $\qquad$ $b)3$

$c)\frac{3}{2}$ $\qquad$ $d)\frac{-2}{3}$

0785351625

Scanned with CamScanner

5) قيمة x التي عندها قيمة صغرى محلية للاقتران:

$f(x) = x^4 - 32x$ هي:

$a)2$ $b) - 2$

$c)1$ $d) - 1$

يمثل الاقتران: $s(t) = 2 + 7t - t^2 \; , t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بلأمتار، و t الزمن بالثواني:

6) اللحظة التي تكون فيها حركة الجسم في الاتجاه السالب هي:

$a) t = 1$ $b) t = 2$

$c) t = 3.5$ $d) t = 4$

7) اللحظة التي يكون فيها الجسم في حالة سكون لحظي هي:

$a) t = 1$ $b) t = 2$

$c) t = 3.5$ $d) t = 4$

أجد معادلة المماس لمنحني كل اقتران مما يأتي عند النقطة المعطتة:

8) $f(x) = x^2 - 7x + 10 \; , (2, 0)$

9) $f(x) = x^2 - \dfrac{8}{\sqrt{x}} \; , (4, 12)$

10) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x} \; , (1,1)$

11) $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{2x + 1}} \; , (4, 1)$

أجد معادلة العمودي على المماس لمنحني كل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

15) $f(x) = 7x^3 + 6x - 5 \; , x = 2$

16) $f(x) = \dfrac{6x^2 - x^3}{4x^4} \; , x = -2$

17) اجد احداثيي النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = x^4 - 3x^3 + 1$ ، التي يكون عندها المماس أفقياً.

18) أجد إحداثيي النقطة الواقعة على منحني الاقتران: $f(x) = x^3 + 3$ ، التي يكون عندها ميل المماس هو 12

07853351625

Scanned with CamScanner

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران مما يأتي:

19) $f(x) = 4x^2 - 5x + 7$

20) $f(x) = \ln x - 9e^x$

21) $f(x) = 10x - 2x\sqrt{x}$

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

22) $f(x) = \sqrt{x}(x + 2), x = 2$

23) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - x^2 , x = 1$

24) نفط: تسرب نفط من ناقلة بحرية، مكونا بقعة دائرية الشكل على سطح الماء، تزداد مساحتها بمعدل $50\ \mathrm{m}^2/min$. أجد سرعة تزايد نصف قطر البقعة عندما يكون طول نصف قطرها 20m ، علماً بأن العلاقة التي تربط بين مساحتها (A) ونصف قطرها (r) هي $A = \pi r^2$.

يمثل الاقتران: $s(t) = t^3 - 6t^2 + 12t , t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

25) ماسرعة الجسم المتجهة عندما $t = 2$؟

26) في أي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t = 2$؟

27) ما تسارع الجسم عندما $t = 2$؟

28) أجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

دراجات: يمكن نمذجة موقع شخص يقود دراجة في مسار مستقيم باستعمال الاقتران : $s(t) = \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t$ ، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

29) ماسرعة الشخص المتجهة بعد 3 ثوان من بدء الحركة؟

30) ما تسارع الشخص بعد 3 ثوان من بدء حركته؟

31) أجد قيم t التي يكون عندها الشخص في حالة سكون لحظي.

0785351625

Scanned with CamScanner

أستعمل اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) لكل اقتران مما ياتي:

32) $f(x) = 9 + 24 - 2x^3$

33) $f(x) = (3x - 2)^3 - 9x$

34) $f(x) = 4x^5 - 10\,x^2$

35) بالونات/ نفخت ماجدة بالوناً على شكل كرة، فازداد حجمه بمعدل $800\ \mathrm{cm}^3/s$. أجد معدل زيادة نصف قطر البالون عندما يكون طول نصف قطره 60 cm . علماً بأن العلاقة التي تربط بين حجم البالون (V) ونصف قطره (r) هي $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

36) خطط مزارع لتسييج حظيرة مستطيلة الشكل قرب نهر كما في الشكل التالي، وحدد مساحة الحظيرة بـ $245000\ m^2$ ، لتوفير كمية عشب كافية لأغنامه. اجد ابعاد الحظيرة التي تجعل طول السياج أقل ما يمكن، علماً بأن الجزء المقابل للنهر لا يحتاج إلى تسييج.

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

37) $x^2 + y^2 = y$

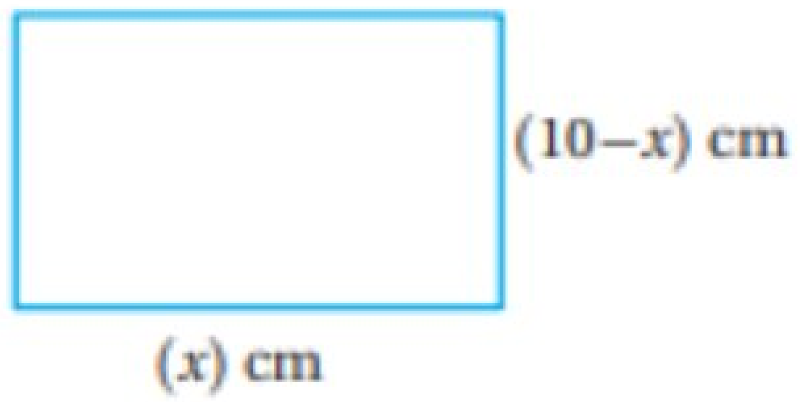
38) $x^2 + 6x - 8y + 5y^2 = 13$

إذا كان: $y^2 + xy + x^2$ ، فأجد كلا مما يأتي:

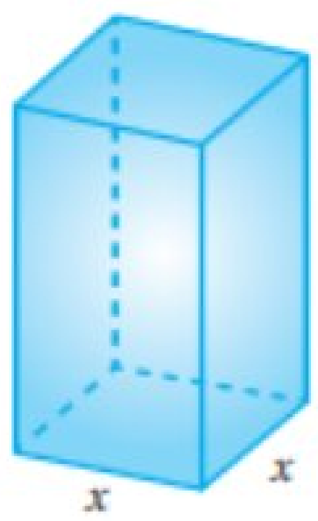
39) ميل المماس عند النقطة $(-4, 3)$.

40) معادلة المماس عند النقطة $(-4, 3)$.

41) سلك طوله $20\ cm$. إذا أريد ثني السلك ليحيط بالمستطيل التالي، فأجد أكبر مساحة مغلقة يمكن إحاطة السلك بها.



يبين الشكل الآتي صندوقاً على شكل متوازي مستطيلات. إذا كانت قاعدة الصندوق مربعة الشكل، وطول ضلع القاعدة $x\ cm$ ، ومجموع أطوال أحرفه $144cm$ ، فأجد كلا مما يلي:



42) الاقتران الذي يمثل حجم الصندوق بدلالة x.

43) قيمة x التي تجعل حجم الصندوق أكبر ما يمكن.

07853351625

Scanned with CamScanner

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي عند النقطة المعطاة :

44) $2x^3 + 4y^2 = -12$, $(-2, -1)$

45) $x^3 - x^2y^2 = -9$, $(3, -2)$

0785351625

Scanned with CamScanner

أساس
توجيهي

تتضمن الدوسية

- شرح مفصل ومبسط للمادة
- أمثلة محلولة على جميع الأفكار بطريقة متسلسلة
- أسئلة الكتاب لكل درس وإجاباتها النهائية
- أسئلة قوة ومهارات عليا لكل درس مع الشرح

أ. بلال أبو دريِّع

Scanned with CamScanner